УДК 621.318.38

Співак Олександр Миколайович, к.т.н., доцент
(доцент кафедри тягового рухомого складу залізниць, ДУІТ)
Ткаченко Віктор Петрович, д.т.н., професор
(завідувач кафедри тягового рухомого складу залізниць, ДУІТ)

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ЗОВНІШНЬОЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВІДКРИТИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ МАГНІТНИХ СИСТЕМ

Уточнений метод розрахунку розподілу напруженості магнітного поля в міжполюсному проміжку відкритих осесиметричних магнітних систем обмеженням досліджуваної області. Запропоновано використання методу квазізвернення, що дозволяє перейти від некоректно поставленого завдання до коректного. Отримано рівняння з граничними умовами, рішення якого здійснюється чисельними методами розрахунку.

Ключові слова: *напруженість магнітного поля, скалярний магнітний потенціал, граничні умови, метод квазізвернення.*

Вступ. Однією з важливих характеристик неоднорідних магнітних полів високої інтенсивності осесиметричних електромагнітних систем є величина напруженості поля. Розрахунок напруженості поля в цих системах, в силу його тривимірності, представляє досить складне завдання. Вагомим фактором, що впливає на результати розрахунку є наявність у схемі повітряного проміжку. Повітряний проміжок істотно впливає на розподіл магнітного поля, як поблизу робочого проміжку, так і по усій довжині магнітопроводу [1, 2].

Класичне аналітичне рішення рівняння Лапласа, що описує розподіл магнітного поля в міжполюсному об’ємі осесиметричних магнітних систем, ускладнене через складну геометрію тіл, що входять у магнітне коло. Пропонується знайти уточнений метод розрахунку з використанням чисельних методів [3-7].

Розрахунок розподілу скалярного магнітного потенціалу у відкритих магнітних системах з полем високої інтенсивності і неоднорідності в робочому об’ємі з використанням чисельних методів розрахунку утруднений через обмеження розрахункової області, в якій робиться розрахунок поля, деякою поверхнею *S*.

Досліджувані в роботі статичні магнітні поля поза областями з розподіленими струмами підкоряються одному з основних рівнянь математичної фізики, а саме, рівнянню Лапласа в приватних похідних, яке має вигляд [8]:

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

де Δ – диференціальний оператор Лапласа другого порядку;
u – скалярний магнітний потенціал.

Ескіз досліджуваного класу задач з розподілом скалярного магнітного потенціалу на межі (поверхні полюсів) зображений на рис.1.

Область, в якій необхідно знайти рішення рівняння (1) є частиною простору, що лежить поза деякою обмеженою полюсами магнітною системою.

DOI:10.32703/2617-9040-2020-35-9

Така гранична задача, як відомо, називається зовнішньою. Задача розрахунку статичного магнітного поля призводить до наступної математичної процедури: знайти функцію *u*, яка в усіх зовнішніх точках заданої області *V* задовольняє рівнянню Лапласа (1), а на межі Γ_0 області *V* – деякій умові, залежно від виду якого, як відомо, розрізняють три основні види граничної задачі [8]:

1) $u(x)=\psi(x)$, коли $x \in \Gamma$ – перша гранична задача – задача Діріхле;

2) $du/dn=\psi(x)$, коли $x \in \Gamma$ – друга гранична задача – задача Неймана;

3) $du/dn+\beta u=\psi(x)$, коли $x \in \Gamma$ – третя – змішана задача.

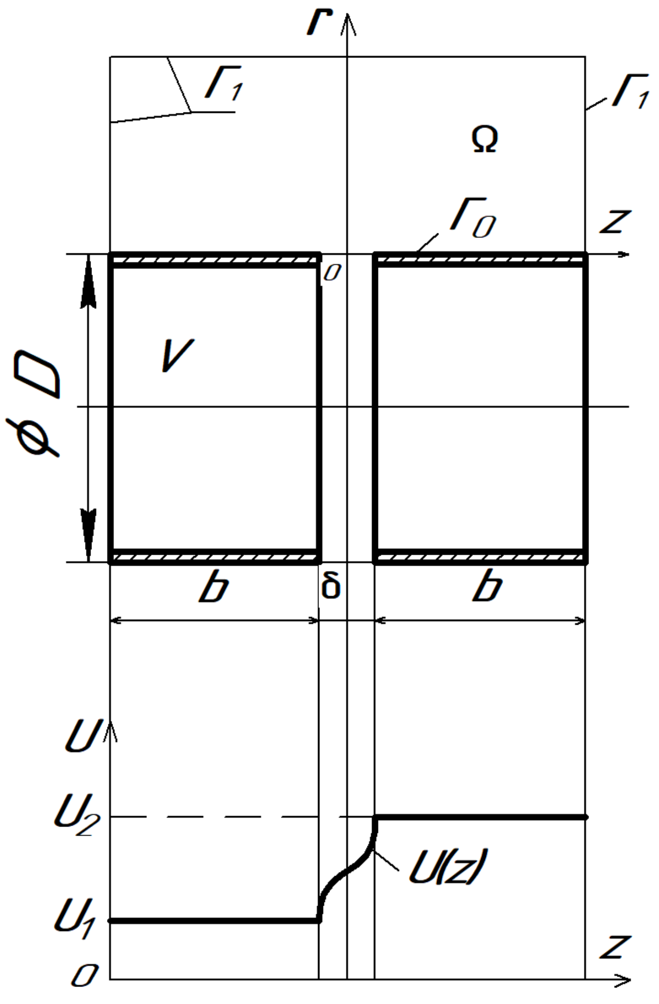

Рис. 1. **Ескіз осесиметричної магнітної системи**

Тут ψ и β – безперервні функції, визначені на граничній поверхні *Г*, а du/dn означає похідну, узяту в точці поверхні *Г* по зовнішній нормалі до неї.

Аналіз останніх досліджень і постановка проблеми. Французьким математиком Адамаром свого часу було сформульовано три умови, яким повинна задовольняти кожна задача, що має зрозумілу фізичну інтерпретацію. Вони відомі як умови коректності по Адамару і відображають вимоги до математичної задачі, які полягають в тому, що рішення повинне:

- по-перше – існувати,
- по-друге – бути єдиним,

- по-третє – безперервно залежати від початкових даних.

При виконанні цих умов задача вважається коректно поставленою.

У разі розрахунку магнітного поля осесиметричних магнітних систем, загальний вид яких зображений на рис.1, необхідно вирішити задачу Коші для рівняння Лапласа, що полягає в знаходженні рішення рівняння (1) за деякими початковими даними, тобто в знаходженні рішення, що задовольняє таким умовам:

$$u(z, \Gamma_0) = q_0; \qquad \frac{\partial u}{\partial r}\Big| \ \Gamma_0 = q_1; \tag{2}$$

де q_0, q_1 – задані обмежені функції.

Як відомо, рішення цієї задачі є нестійким, через те що не виконується третя умова коректності по Адамару і, отже, задача є некоректно поставленою.

До порівняно недавнього часу некоректні задачі вважалися позбавленими фізичного сенсу і практичної цінності. Але, як показали подальші дослідження, нестійкі рішення виникають при описі багатьох реальних фізичних явищ [9,10].

У роботах Тихонова сформульовано нове визначення коректності, яке відомо, як коректність по Тихонову[8].

Великий клас задач, описується в абстрактній формі операторними рівняннями першого роду

$$A \cdot u = f\ , \tag{3}$$

де u, f – відповідно шуканий і даний елементи деяких просторів U і F;

A – задане відображення (оператор), що діє з простору U в простір F.

Так от, завдання (3) називається коректно поставленим по Тихонову або умовно-коректним завданням, якщо виконані наступні умови:

- апріорі відомо, що рішення задачі (3) існує і належить деякій заданій множині $M \in U$, тобто $f \in N = AM$;
- рішення єдине на безлічі M, тобто оператор обертаємий на безлічі M;
- існує безперервна залежність рішення u від правої частини f, коли варіації f не виводять рішення за межі безлічі M, тобто оператор A^{-1} безперервний у відносній топології безлічі N.

Отже, коректність по Тихонову відрізняється від коректності по Адамару звуженням класу можливих рішень до безлічі M (чи, що те ж саме, звуженням можливих правих частин f до безлічі N).

Досліджуване завдання (1, 2) відносять до умовно-коректного або коректного по Тихонову. Для ефективного розв’язання нестійких завдань створені спеціальні регулярні методи, ґрунтовані на заміні початкового некоректного завдання завданням або послідовністю завдань коректних в звичайному сенсі.

Для низки нестійких задач математичної фізики Р. Латтесом і Ж. Лионсом розроблений метод квазізвернення, який може бути застосований, як для еволюційних задач, так і стаціонарних [11]. Зокрема, нестаціонарні процеси є типовими для системи електропостачання електричних локомотивів [12, 13].

Є нескінченна безліч можливих способів квазізвернення, ґрунтованих на одній і тій же ідеї – змінити «систему» так, щоб некоректне завдання перетворилося на коректне. Основна ідея методу квазізвернення полягає в належній зміні диференціальних операторів, що входять в завдання. Ця зміна робиться введенням додаткових диференціальних членів, які відповідають таким умовам:

по-перше, вони – досить «малі» (можуть прямувати до нуля);

по-друге, «вироджуються на межі» (для того, щоб, наприклад, усунути ті, що виникають з введенням нових членів складні граничні умови, а також умови, в які можуть увійти невідомі, такі, що підлягають визначенню).

Побудовані таким чином оператори мають, як правило, більш високий порядок.

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є розрахунок розподілу магнітного поля з високим ступенем інтенсивності і неоднорідністі в повітряному зазорі відкритих осесиметричних магнітних систем чисельними методами. Для використання чисельних методів розрахунку необхідно вирішити наступні завдання

- дослідити рішення рівняння Лапласа в приватних похідних для зовнішньої граничної задачі, яку відносять до умовно – коректних;
- проаналізувати спеціальні регулярні методи заміни початкової некоректної задачі задачею або послідовністю задач коректних в звичайному сенсі;
- дослідити застосування методу квазізвернення для чисельного рішення зовнішньої граничної задачі розподілу поля відкритих магнітних систем.

Матеріали та методи дослідження. На рис.1 зображено область Ω, в якій необхідно знайти розподіл скалярного магнітного потенціалу. Для вирішення застосований метод квазізвернення [11], згідно якого необхідно знайти рішення не операторного рівняння Лапласа

$$\mathrm{A} \cdot u = 0\,, \tag{4}$$

з граничними умовами

$$u(z, D/2) = q_0;$$

$$\partial u / \partial r \big| (r = D/2) = q_1 \text{ при } \; -b - \delta/2 < z < b + \delta/2; \tag{5}$$

а рівняння

$$\frac{1}{\varepsilon_1^2} A^*(M_{\varepsilon_0}^2 A u_\varepsilon) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_{\varepsilon_0}^2 a_{i,j} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}) + a_0 u_\varepsilon = 0, \tag{6}$$

що задовольняє граничним умовам (5).

У рівнянні (6):

A – еліптичний диференціальний оператор другого порядку, в загальному вигляді який визначається таким чином:

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \mathrm{a}_0,$$

$a_{i,j} \in C^3(\overline{\Omega}), \qquad a_0 \in C^0(\overline{\Omega});$

$C^3(\overline{\Omega})$ – простір функцій що мають третю безперервну похідну в області $\overline{\Omega}$;

$C^0(\overline{\Omega})$ – простір безперервних функцій в області $\overline{\Omega}$;

*A** – еліптичний диференційний оператор, пов’язаний оператору *A*.

Функції M_{ε_0} і ρ_{ε_0} у рівнянні (6) визначаються таким чином (рис. 2, 3):

$M_{\varepsilon_0}(x) = 1$, якщо $d(\mathrm{p}, \Gamma_1) \geq 2\varepsilon_0$, $x \in \Omega$;
$M_{\varepsilon_0}(x) = 0$, якщо $d(\mathrm{p}, \Gamma_1) < \varepsilon_0$;
$M_{\varepsilon_0}(x)$ безперервно змінюється від 0 до 1 в останній частині Ω ;

$\rho_{\varepsilon_0}(x) = 1$, якщо $d(p, \Gamma_1) \geq \varepsilon_0$;
$\rho_{\varepsilon_0}(x) = d(\mathrm{p}, \Gamma_1)\dfrac{1}{\varepsilon_0}$, якщо $d(p, \Gamma_1) < \varepsilon_0$,

де $d(p, \Gamma_1)$ – відстань довільної точки *p* до межі Γ_1 (див. рис. 2, 3), $p \in \Omega$.

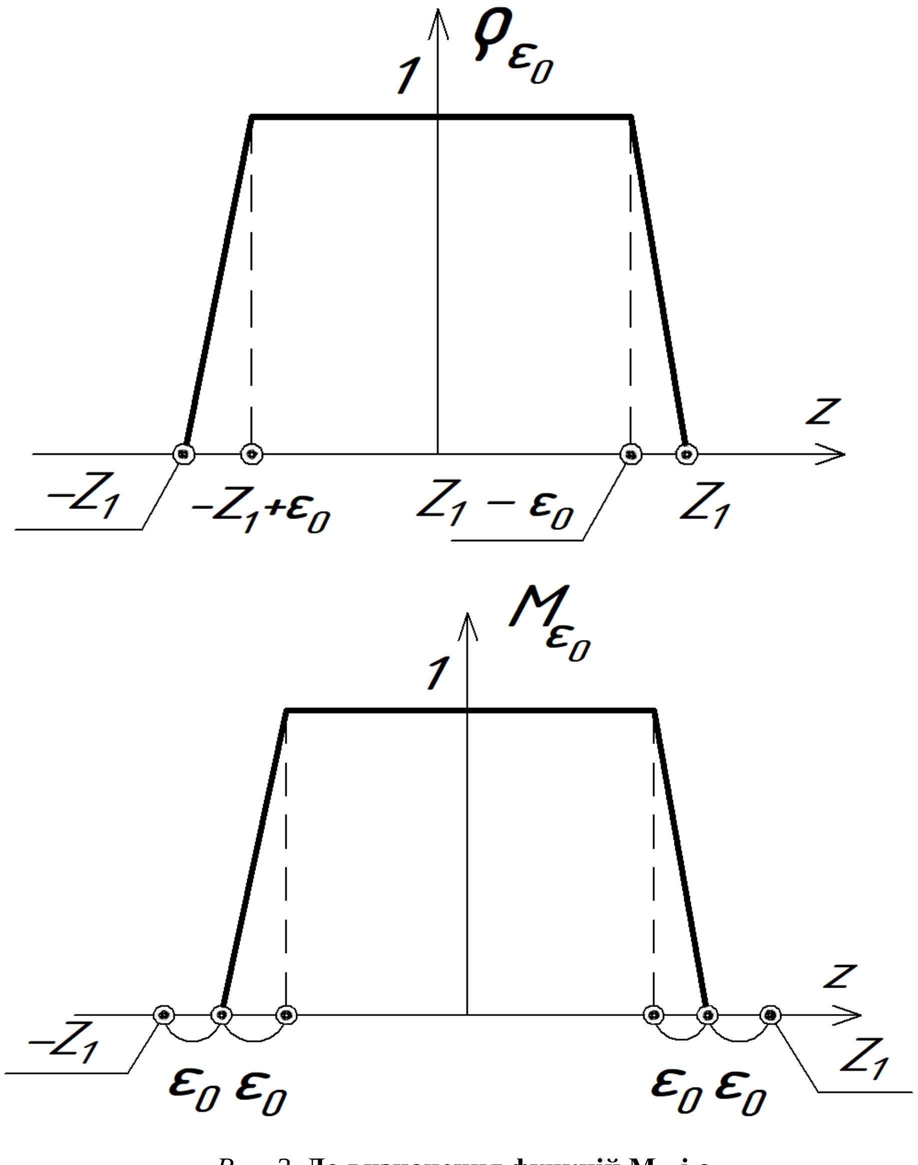

Рис. 2. **До визначення функцій $M_{\varepsilon 0}$ і $\rho_{\varepsilon 0}$**

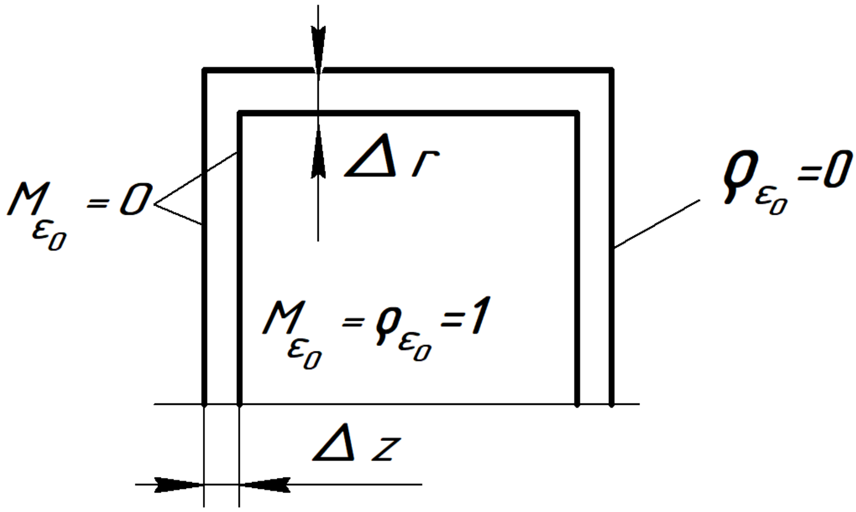

Рис. 3. **Граничні значення функцій для $\varepsilon_0 = \Delta z = \Delta r$**

Введемо оператор $A_{\varepsilon 0}$, що є «апроксимацією» оператора A («яка вироджується на границі Γ_1»)

$$A_{\varepsilon_0} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_{\varepsilon_0}^2 a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \mathrm{a}_0,$$

Рівняння (6) набуває вигляду:

$$\frac{1}{\varepsilon_i^2} A^*\left(M_{\varepsilon_o}^2 A u_\varepsilon\right) + A_{\varepsilon_0} u_\varepsilon = 0 \qquad (7)$$

Гранична функція u повинна задовольняти рівнянню:

$$Au = 0$$

Згідно з методом квазізвернення, завдання (6) або, що те ж саме, (7) з початковими умовами (5) визначають u_ε єдиним чином і поставлена коректно.
Звернемо увагу на наступне:

- еліптичний диференціальний оператор в рівнянні (6) четвертого порядку усередині області $\Omega` = \Omega\varepsilon_o$, тут $\Omega`$ (чи Ω_{ε_o}) – відкрита множина в області Ω виду $\Omega` = \{x \mid d(\mathrm{x}, \Gamma_1) \le \varepsilon_0\}$,
- цей оператор вироджується в проміжній межі $d(x, \Gamma_1) = \varepsilon_0$, так, що крім умов (5), не потрібно ніяких інших граничних умов.

Таким чином (відповідно до загальної ідеї квазізвернення), некоректне завдання замінене сімейством коректних завдань. На практиці, вибравши *ε,* де $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ безпосередньо вирішують задачу (5, 6) з використанням чисельних методів розрахунку [14-15].

Висновки. Для розрахунку розподілу магнітного поля в міжполюсному просторі відкритих осесиметричних магнітних систем необхідно вирішити задачу Коші для рівняння Лапласа, яка відноситься до умовно-коректних. Для регуляризації завдачі використаний метод квазізвернення, головна ідея якого полягає в зміні диференціальних операторів у рівнянні, що описує розподіл скалярного магнітного потенціалу. Використання методу квазізвернення для досліджуваної зовнішньої граничної задачі дозволяє ефективно використати чисельні методи розрахунку розподілу магнітного поля для відкритих осесиметричних систем.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Буль О.Б.* Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов. Магнитные цепи, поля и программа FEMM. М.: Академия, 2005. 336 с.
2. *Андреева Е.Г.,* Татевосян А.А., Семина И.А. Исследование осесимметричной модели магнитной системы открытого типа. *Омский научный вестник*. 2010. Вып.1(87). С.110-113.
3. Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry / Camacho J.M., Sosa V. // Revista Mexicana de F´ısica. 2013. Vol. 59. P. 8–17.
4. *Steinbach O.* Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems. New York: Springer, 2008.
5. *Sivak S.* Boundary Element Method for eddy current problem // Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE), 2014 12th International Conference on. IEEE. 2014. C. 207—214.
6. *Kuczmann M.* Potential formulations in magnetics applying the finite element method // Lecture notes, Laboratory of Electromagnetic Fields,"Sz´echenyi Istv´an" University, Gyor, Hungary. 2009.
7. *Самарский А.А.,* Вабищев П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие. Изд.3-е. М.: Издательство ЛКИ, 2009. 480с.
8. *Тихонов А.Н.,* Самарский А.А. Уравнения математической физики. 7-е изд. М.: Наука, 2004. 798 с.
9. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2018. 511с.
10. *Воронин А.Ф.* , Ковтанюк А.Е. , Лаврентьев М.М. Краевая задача Римана в исследовании корректности линейных и нелинейных задач математической физики. *Сиб. электрон. матем. изв*. 2010. Вып.7. С. 112–122.
11. *Султанов М.А*., Калматаева Б.Б. О решении граничной обратной задачи для параболического уравнения методом квазиобращения. Научные труды ЮКГУ им.М.Ауэзова. 2016. Вып.1(36). С. 63-67.
12. *Gorobchenko O*., Tkachenko V. Statistical analysis of locomotives traction motors performance. *MATEC Web of Conferences*. 2019. Vol. 287, p. 04002. EDP Sciences. https://doi.org/10.1051/matecconf/201928704002.
13. *Goolak S*., Gerlici J., Sapronova S., Tkachenko V., Lack T., & Kravchenko K. Determination of Parameters of Asynchronous Electric Machines with Asymmetrical Windings of Electric Locomotives. *Communications-Scientific letters of the University of Zilina*, 2019. *21*(2), 24-31. ISSN 2585-7878.
14. Finite element formulation with coupled vector-scalar magnetic potentials for eddy current problems // 11th International Forum on Strategic Technology (IFOST-2016). IEEE. 2016. C. 456–460.
15. *Yufeng L.,* Fengtao Y. Research progress and development trend of permanent magnetic separators in China and abroad // Proceedings of 3rd International Conference on Vehicle, Mechanical and Electrical Engineering (ICMVEE). U.S.A. 2016. https://doi:10.12783/dtetr/icvmee2016/4873.

REFERENCES

1. Bul O.B. (2005). Metody rascheta magnitnykh sistem elektricheskikh apparatov. *Magnitnyye tsepi, polya i programma FEMM [Calculation methods for magnetic systems of electrical apparatus. Magnetic circuits, fields and the FEMM]*. Moscow: Akademiya [in Russian].
2. Andreeva E.G., Tatevosyan A.A., Semina I.A. (2010). Issledovanie osesimmetrichnoy modeli magnitnoy sistemyi otkryitogo tipa [Research of an axisymmetric model of an open type magnetic system]. *Omskiy nauchnyiy vestnik – Omsk Scientific Bulletin, Issue 1 (87),* 110-113 [in Russian].
3. Camacho J.M., & Sosa V. (2013). Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry. *Revista Mexicana de F´ısica, 59,* 8–17.
4. Steinbach, O. (2008). Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems. *Finite and Boundary Elements*. (1 ed.) New York: Springer.
5. Sivak S. (2014). Boundary Element Method for eddy current problem. *12th International Conference on. IEEE*. 207–214.
6. Kuczmann M. (2009). Potential formulations in magnetics applying the finite element method. *Fields."Sz´echenyi Istv´an"* University.
7. Samarskiy A.A., Vabishchev P.N. (2009). Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki *[Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics]*. Moscow: Publishing house LCI [in Russian].
8. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. (2004). Uravneniya matematicheskoy fiziki *[Equations of mathematical physics]*. Moscow: Nauka [in Russian].
9. Kabanikhin S. I. (2018). Obratnyye i nekorrektnyye zadachi *[Inverse and ill-posed problems]*. Novosibirsk: Publishing House of the SB RAS [in Russian].

10. A. F. Voronin, A. Ye. Kovtanyuk, M. M. Lavrent'yev. (2010). Krayevaya zadacha Rimana v issledovanii korrektnosti lineynykh i nelineynykh zadach matematicheskoy fiziki [The Riemann boundary value problem in the study of the correctness of linear and nonlinear problems in mathematical physics] *Sib. elektron. matem. izv. – Sib. electron. mate. izv. Issue 7.* 112–122 [in Russian].

11.Sultanov M.A., Kalmatayeva B.B. (2016). O reshenii granichnoy obratnoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya metodom kvaziobrashcheniya [On the solution of the boundary inverse problem for a parabolic equation by the quasi-inversion method] *Nauchnyye trudy YUKGU im.M.Auezova – Scientific works of SKSU named after M. Auezov. Issue 1 (36).* 63-67 [in Russian].

12. Gorobchenko, O., & Tkachenko, V. (2019). Statistical analysis of locomotives traction motors performance. *MATEC Web of Conferences*. *287,* 04002. EDP Sciences. https://doi.org/10.1051/matecconf/201928704002.

13. Goolak, S., Gerlici, J., Sapronova, S., Tkachenko, V., Lack, T., & Kravchenko, K. (2019). Determination of Parameters of Asynchronous Electric Machines with Asymmetrical Windings of Electric Locomotives. *Communications-Scientific letters of the University of Zilina*, *21*(2), 24-31. ISSN 2585-7878.

14. Royak M. (2016). Finite element formulation with coupled vector-scalar magnetic potentials for eddy current problems. IEEE 11th International Forum on Strategic Technology, 456—460.

15. Yufeng L., Fengtao Y. (2016). Research progress and development trend of permanent magnetic separators in China and abroad. *Proceedings of 3rd International Conference on Vehicle, Mechanical and Electrical Engineering (ICMVEE). U.S.A.* https://doi:10.12783/dtetr/icvmee2016/4873.

Спивак Александр Николаевич, к.т.н., доцент
(доцент кафедры «Тяговый подвижной состав железных дорог», ГУИТ)
Ткаченко Виктор Петрович, д.т.н., профессор
(заведующий кафедрой «Тяговый подвижной состав железных дорог», ГУИТ)

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ВНЕШНЕЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОТКРЫТЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ

Уточнен метод расчета распределения напряженности магнитного поля в межполюсном зазоре открытых осесимметричных магнитных систем ограничением исследуемой области. Предложено использование метода квазиобращения, позволяющего перейти от некоректно поставленной задачи к корректной. Получено уравнение с граничними условиями, решение которого осуществляется численными методами расчета.

Ключевые слова: *напряженность магнитного поля, скалярный магнитный потенциал, граничные условия, метод квазиобращения.*

OleksandrSpivak, Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor
(an associate professor Department of traction rolling stock of railways, SUIT)
Viktor Tkachenko, Doctor of Technical Sciences, Professor
(leader by a department the "Hauling rolling stock of railways" SUIT)

REGULARIZATION OF AN EXTERNAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR OPEN AXISYMMETRIC MAGNETIC SYSTEMS

Important characteristic of magnetic-field with the high measure of intensity and heterogeneity in the swept volume of the electromagnetic systems is a size of tension of the field H. Calculation of tension in the field H in these systems, characterized by relatively large air interval, given its three-dimensionalty, presents a very difficult task.

Analytical decision of equalization of Laplace that describes distribution of magnetic-field in the interpolar volume of the axisymmetrical magnetic systems, difficultly from difficult geometry of bodies that is included in a calculation area, that is why for research of distribution of tension the expedient use of numeral methods of calculation - to the method of eventual differences, method of eventual elements, method of maximum integral equalizations.

The calculation of distribution of scalar magnetic potential in open magnetic systems with the use of numeral methods of calculation causes the difficulties related to limitation of calculation area in which the calculation is conducted.

The static magnetic fields, analysed in this research, obey one of basic equalizations of mathematical physics, and namely, to equalization of Laplace in partial differential.

In case of calculation of magnetic field of the axisymmetrical magnetic systems it is necessary to resolve the Cauchy problem for equalization of Laplace. It is known, that this task does not have characteristic of steadyness, and thus does not obey Hadamars third condition of correctness and, therefore, is considered incorrectly defined.

For the number of unsteady tasks of mathematical physics of R.Lattes and ZH.Lions developed the quasi-random method, that can be applied both for evolutional tasks, as well as for constant. The basic idea of quasi-random method lays in proper update of differential operators that are part of the task. This change is done by introducing additional differential elements. Application of this method allows to use effectively the numeral methods of calculation of regional task for open axisymmetrical systems.

Keywords: *magnetic field tension, scalar magnetic potential, boundary conditions, quasi-random method.*