

УДК 539.3

*Елена Шикла, д.ф.-м.н.
(профессор кафедры компьютерных наук Государственного университета телекоммуникаций)*

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Предложена модель нелинейного деформирования слоистых материалов с физически нелинейными слоями. Построен алгоритм для определения их эффективных деформативных свойств и напряженно-деформированного состояния. Исследовано нелинейное деформирование слоистых материалов. Получены кривые деформирования для простого нагружения. Изучено влияние нелинейности слоев на деформирование материала. Установлено, что нелинейность слоев существенно влияет на эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние слоистых материалов.

***Ключевые слова:** слоистый материал, нелинейное деформирование слоев, напряженно-деформированное состояние, эффективные деформативные свойства, влияние нелинейности*

Введение. В различных отраслях промышленности широкое распространение получили композитные материалы различного типа армирования. Широко применяются они также на транспорте. В связи с широким применением композитных материалов в современных инженерных конструкциях и сооружениях актуальной задачей является изучение механического поведения композитных материалов при нагружении. Наряду с экспериментальными методами определения свойств композитных материалов интенсивно разрабатываются теории, посвященные изучению их деформирования и разрушения. Проводятся исследования по определению напряженно-деформированного состояния, прогнозированию физико-механических свойств, выбору оптимальной структуры композитных материалов.

Анализ последних исследований и постановка проблемы. При достаточно большом нагружении многие композитные материалы деформируются нелинейно вследствие физической нелинейности компонентов материала [1]. Нелинейный характер зависимостей между макродеформациями и макронапряжениями характерен для композитов на основе металлической матрицы, а также на основе полимерных материалов при высоких температурах. Экспериментальные исследования показывают [2], что при достаточно высоких температурах нелинейно деформируются также высокомолекулярные материалы типа органического стекла. На рис. 1 приведены графики экспериментальной зависимости напряжения от деформации для органического стекла при различных температурах. Как видим при температуре 80° зависимость между напряжением и деформацией имеет параболический характер. Поэтому представляет интерес исследование физически нелинейного деформирования слоистых материалов при нелинейном деформировании как наполнителя, так и связующего.

Слоистые композиты на основе металлической и полимерной матриц широко применяются для изготовления деталей, работающих в условиях высоких силовых и температурных нагрузок. Поэтому прогнозирование их нелинейных свойств является актуальным.

DOI:10.32703/2617-9040-2020-36-13

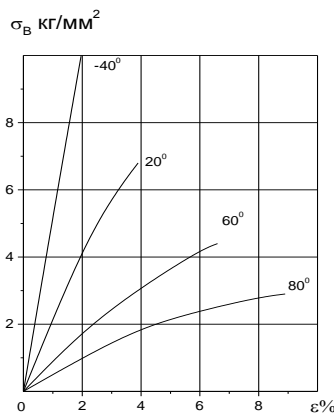


Рис. 1. Экспериментальная зависимость напряжения от деформации для органического стекла при различных температурах

Методы решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела разрабатывались в работах Бленда Д., Каудерера Г., Лурье А.И., Митропольского Ю.А., Березовского А.А., Новожилова В.В., Трусделла К., Bharatha S., Levinson M., Green A.E. Adkins I.E., Hill R., Ogden R.W. и др. В большинстве работ применялся метод разложения решения по степеням малого параметра, причем при решении конкретных задач ограничивались, как правило, первыми двумя членами разложения. В связи с этим решение задач о нелинейном деформировании материалов получено для слабо нелинейных деформаций, то есть для таких деформаций, для которых материал деформируется по нелинейному закону, близкому к линейному. Изучению механического поведения композитных материалов с нелинейно деформируемыми компонентами или нелинейно деформирующихся материалов посвящены работы Васильева В.В. и Солдатова С.А., Дудукаленко В.В. и Минаева В.А., Крегерса А.Ф. и Мелбардиса Ю.Г., Левина В.М., Малмейстера А.К. и Янсона Ю.О., Хорошуна Л.П. и Маслова Б.П., Цурпала И.А., Штерна М.Б. и др., Hill R., Ogden R.W., Tandon G.P. и Weng G.J., Tzadka V. и Shulgasser K. и др.

Решение линейной задачи о деформировании стохастически неоднородных композитов различных типов армирования было получено Л.П.Хорошуном [3, 4]. Различные аспекты деформирования слоистых композитных материалов с нелинейной матрицей были изучены в работах Хорошуна Л.П., Шикеры Е.Н. [5-7, 9-18]. Однако авторы рассматривали слоистые материалы с нелинейной или упругопластическим связующим и упругим наполнителем. Не было построено модели деформирования слоистых материалов в случае нелинейного деформирования всех видов слоев – как наполнителя, так и связующего.

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является построение модели и исследование нелинейного деформирования слоистых материалов. Задачами исследования являются построение модели нелинейного деформирования слоистых материалов, разработка алгоритма определения напряженно-деформированного состояния и эффективных деформативных свойств слоистого материала с физически нелинейными слоями, а также исследование зависимости деформирования слоистого материала от объемного содержания слоев. В основу положены стохастические дифференциальные уравнения физически нелинейной теории упругости Л.П.Хорошуна [3-6].

Материалы и методы исследования. Исходные уравнения. Слоистый материал стохастической структуры можно представить как микронеоднородный материал, физико-механические характеристики которого являются функциями одной координаты. Рассмотрим макрообъем слоистого материала. Если макрообъем (объем, размеры которого значительно превосходят размеры микронеоднородностей) композита находится в условиях однородных макронапряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформаций $\langle \epsilon_{ij} \rangle$, то напряжения σ_{ij} и деформации ϵ_{ij} в

микроточке будут статистически однородными случайными функциями, удовлетворяющими свойству эргодичности. При этом их математические ожидания в произвольной точке совпадают соответственно с макронапряжениями и макродеформациями. Будем предполагать, что свойства и параметры материала статистически однородны на расстояниях, значительно превосходящих характерные размеры неоднородностей. Тогда композит можно рассматривать как однородный материал с эффективными характеристиками [3-6, 8].

Напряженно-деформированное состояние в микроточке описывается уравнениями равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1)$$

соотношениями Коши, выражающими микродеформации ε_{ij} через перемещения в точке u_i

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j, p = 1, 2, 3) \quad (2)$$

и соотношениями упругости

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\lambda = K - \frac{2}{3}\mu) \quad (3)$$

где модули объемного сжатия K и сдвига μ — случайные функции координат, принимающие значения $K_1(\varepsilon)$, $\mu_1(\varepsilon)$ и $K_2(\varepsilon)$, $\mu_2(\varepsilon)$ соответственно для наполнителя и связующего.

Нелинейные уравнения для определения эффективных деформативных свойств и напряженно-деформированного состояния композита. Пусть ось x_3 направлена по нормали к слоям. Тогда упругие характеристики K, λ, μ будут случайными функциями только координаты x_3 . Вследствие однородности макронапряжений $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ напряжения σ_{ij} , деформации ε_{ij} и флуктуации перемещений $u_i^0 = u_i - \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j$ в микроточке также будут функциями одной координаты x_3 . В этом случае уравнения равновесия упрощаются

$$\sigma_{i3,3} = 0, \quad (4)$$

откуда находим

$$\sigma_{i3} = A_i, \quad A_i = const. \quad (5)$$

Выражения для деформаций согласно (2) имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{1}{2}(u_{i,3}^0 \delta_{j3} + u_{j,3}^0 \delta_{i3}). \quad (6)$$

Подставляя (3), (6) в интегралы уравнений равновесия (5), получаем алгебраические уравнения относительно производных флуктуаций перемещений [3-6]

$$u_{i,3}^0 = \frac{1}{\mu} A_i - 2 \langle \varepsilon_{i3} \rangle;$$

$$u_{3,3}^0 = \frac{1}{\lambda + 2\mu} A_3 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \langle \varepsilon_{kk} \rangle - \langle \varepsilon_{33} \rangle \quad (i, k = 1, 2). \quad (7)$$

Осредняя (7), определяем постоянные интегрирования

$$A_i = 2 \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle;$$

$$A_3 = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right) \quad (i, k = 1, 2). \quad (8)$$

Здесь обозначено $\langle f \rangle = c_1 f_1 + c_2 f_2$, где f_1, f_2 - значения параметра f соответственно для наполнителя и связующего, а c_1, c_2 - их объемные содержания.

На основе (6) – (8) находим микродеформации [3-6]

$$\varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle; \quad \varepsilon_{i3} = \frac{1}{\mu} \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle;$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left[\left(\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle - \lambda \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right]$$

$(i, j, k = 1, 2).$ (9)

Подставляя (9) в (3), получаем выражения для микронапряжений [3-6]

$$\sigma_{ij} = 2\mu \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle + 2\mu \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{kk} \rangle \delta_{ij} +$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}; \quad \sigma_{i3} = 2 \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle;$$

$$\sigma_{33} = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right) \quad (i, j, k = 1, 2). \quad (10)$$

Осредняя (10), находим зависимости между макронапряжениями и макродеформациями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{ij};$$

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, k = 1, 2), \quad (11)$$

Где эффективные упругие постоянные определяются формулами [3-6]

$$\lambda_{11}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2 + 4 \left\langle \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \right\rangle;$$

$$\lambda_{12}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \right\rangle;$$

$$\lambda_{13}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle; \quad \lambda_{33}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}; \quad \lambda_{44}^* = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1}. \quad (12)$$

Отметим, что в случае физической нелинейности слоев в композите упругие постоянные этих слоев, а следовательно, и эффективные коэффициенты (12) являются функциями средних в слоях деформаций $\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle$ ($\nu = 1, 2$). Выразив средние деформации в слоях через средние деформации в композите $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, получим эффективные коэффициенты как функции средних деформаций в композите. Согласно (9) средние деформации в слоях $\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle$ ($\nu = 1, 2$) связаны со средними деформациями в композите $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ соотношениями:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle; & \langle \varepsilon_{i3}^{\nu} \rangle &= \frac{1}{\mu_{\nu}} \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \\ \langle \varepsilon_{33}^{\nu} \rangle &= \frac{1}{\lambda_{\nu} + 2\mu_{\nu}} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1} \left[\left(\left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle - \lambda_{\nu} \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right] \end{aligned} \quad (i, j, k = 1, 2). \quad (13)$$

Подставив выражения (13) в (12), получим выражения для эффективных коэффициентов λ_{mn}^* как функций средних деформаций в композите $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Алгоритм для определения эффективных деформативных свойств и напряженно-деформированного состояния композита. Эффективные коэффициенты слоистого материала с физически нелинейными слоями будем определять итерационным методом по следующему алгоритму. Нулевое приближение соответствует случаю физически линейных слоев. Тогда для нулевого приближения

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{*(0)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right\rangle^2 + 4 \left\langle \frac{\mu(0)(\lambda(0) + \mu(0))}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right\rangle; \\ \lambda_{12}^{*(0)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda(0)\mu(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right\rangle; \\ \lambda_{13}^{*(0)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right\rangle; \\ \lambda_{33}^{*(0)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right\rangle^{-1}; & \lambda_{44}^{*(0)} &= \left\langle \frac{1}{\mu(0)} \right\rangle^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle^{(0)} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle; & \langle \varepsilon_{i3}^{\nu} \rangle^{(0)} &= \frac{1}{\mu_{\nu}(0)} \left\langle \frac{1}{\mu(0)} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \\ \langle \varepsilon_{33}^{\nu} \rangle^{(0)} &= \frac{1}{\lambda_{\nu}(0) + 2\mu_{\nu}(0)} \left\langle \frac{1}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right\rangle^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\left(\left\langle \frac{\lambda(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right\rangle - \lambda_v(0) \left\langle \frac{1}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right] \quad (i, j, k = 1, 2). \quad (15)$$

Для первого приближения получим

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{*(1)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle^2 + \\ &\quad + 4 \left\langle \frac{\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) (\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + \mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}))}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle; \\ \lambda_{12}^{*(1)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle^2 + \\ &\quad + 2 \left\langle \frac{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) \mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle; \\ \lambda_{13}^{*(1)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle; \\ \lambda_{33}^{*(1)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle^{-1}; \quad \lambda_{44}^{*(1)} = \left\langle \frac{1}{\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(1)} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{i3}^v \rangle^{(1)} = \frac{1}{\mu_v(\langle \varepsilon^v \rangle^{(0)})} \left\langle \frac{1}{\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \\ \langle \varepsilon_{33}^v \rangle^{(1)} &= \frac{1}{\lambda_v(\langle \varepsilon^v \rangle^{(0)}) + 2\mu_v(\langle \varepsilon^v \rangle^{(0)})} \left\langle \frac{1}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle^{-1} \times \\ &\times \left[\left(\left\langle \frac{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle - \lambda_v(\langle \varepsilon^v \rangle^{(0)}) \left\langle \frac{1}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(0)})} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right] \\ &\quad (i, j, k = 1, 2), \end{aligned} \quad (17)$$

где принято обозначение $\langle f(\langle \varepsilon \rangle^{(0)}) \rangle = c_1 f_1(\langle \varepsilon^1 \rangle^{(0)}) + c_2 f_2(\langle \varepsilon^2 \rangle^{(0)})$.

И для n -го приближения

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{*(n)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle^2 + \\ &\quad + 4 \left\langle \frac{\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) (\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + \mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}))}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle; \\ \lambda_{12}^{*(n)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle^2 + \\ &\quad + 2 \left\langle \frac{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) \mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle; \end{aligned}$$

$$\lambda_{13}^{*(n)} = \left\langle \frac{1}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle;$$

$$\lambda_{33}^{*(n)} = \left\langle \frac{1}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle^{-1}; \quad \lambda_{44}^{*(n)} = \left\langle \frac{1}{\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle^{-1}. \quad (18)$$

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{i3}^v \rangle^{(n)} = \frac{1}{\mu_v(\langle \varepsilon^v \rangle^{(n-1)})} \left\langle \frac{1}{\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle;$$

$$\langle \varepsilon_{33}^v \rangle^{(n)} = \frac{1}{\lambda_v(\langle \varepsilon^v \rangle^{(n-1)}) + 2\mu_v(\langle \varepsilon^v \rangle^{(n-1)})} \left\langle \frac{1}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle^{-1} \times$$

$$\times \left[\left\langle \frac{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle - \lambda_v(\langle \varepsilon^v \rangle^{(n-1)}) \left\langle \frac{1}{\lambda(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)}) + 2\mu(\langle \varepsilon \rangle^{(n-1)})} \right\rangle \right] \langle \varepsilon_{kk} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle$$

$$(i, j, k = 1, 2), \quad (19)$$

Предложенный метод позволяет определить эффективные коэффициенты слоистого материала с любой заданной степенью точности.

Исследование влияния нелинейности компонентов на деформирование композита. В качестве конкретной задачи исследуем нелинейное деформирование слоистого материала, у которого модули объемного сжатия наполнителя K_1 и связующего K_2 постоянны, а модули сдвига μ_v ($v = 1, 2$) задаются функциями

$$\mu_1(\langle \varepsilon^1 \rangle) = \begin{cases} \mu_{01}, & J_\varepsilon^1 < \frac{k_1}{2\mu_{01}}; \\ \mu_{01} - \mu'_1 \left(1 - \frac{k_1}{2J_\varepsilon^1} \right), & J_\varepsilon^1 \geq \frac{k_1}{2\mu_{01}}; \end{cases} \quad (20)$$

$$\mu_2(\langle \varepsilon^2 \rangle) = \begin{cases} \mu_{02}, & J_\varepsilon^2 < \frac{k_2}{2\mu_{02}}; \\ \mu'_2 + \left(1 - \frac{\mu'_2}{\mu_{02}} \right) \frac{k_2}{2J_\varepsilon^2}, & J_\varepsilon^2 \geq \frac{k_2}{2\mu_{02}}, \end{cases} \quad (21)$$

где $\mu_{0v}, \mu'_v, k_v = \sigma_{0v} \sqrt{2/3}$ – постоянные наполнителя (при $v = 1$) и связующего (при $v = 2$) материала, σ_{0v} – предел их текучести, $J_\varepsilon^v = (\langle \varepsilon_{pq}^v \rangle' \langle \varepsilon_{pq}^v \rangle')^{1/2}$, $\langle \varepsilon_{pq}^v \rangle'$ – девиатор средних в наполнителе или связующем деформаций.

При выполнении расчетов в качестве компонентов взяты соответственно наполнитель из органического стекла, который имеет диаграмму нелинейного деформирования (20) с постоянными [2, 5-7]

$$K_1 = 27,78 \text{ ГПа}; \quad \mu_{01} = 20,83 \text{ ГПа}; \quad \mu'_1 = 0,184 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{01} = 1,8 \text{ ГПа}, \quad (22)$$

объемным содержанием $c_1 = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 1,0$

и эпоксидное связующее, которое имеет диаграмму линейного упрочнения (21) с постоянными [2, 5-7]

$$K_2 = 3,33 \text{ ГПа}; \quad \mu_{02} = 1,11 \text{ ГПа}; \quad \mu'_2 = 0,02 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{02} = 0,12 \text{ Гпа}. \quad (23)$$

На основе полученных зависимостей были исследованы эффективные диаграммы нелинейного деформирования слоистого материала при различных объемных концентрациях наполнителя в случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = 0. \quad (24)$$

В этом случае согласно (11) макронапряжение $\langle \sigma_{33} \rangle$ в материале связано с макродеформацией $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \frac{1}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} \left[(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2 \right] \langle \varepsilon_{33} \rangle. \quad (25)$$

при этом имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle = -\frac{\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad (26)$$

что эквивалентно условию (24).

На рис. 2 приведены графики зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$ от макродеформации $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ для слоистого материала при различных объемных концентрациях наполнителя c_1 . Как видим, физическая нелинейность слоев материала оказывает существенное влияние на характер диаграмм деформирования для всех значениях объемного содержания наполнителя $c_1 < 1$. При $c_1 > 0$ кривые зависимостей $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$ от $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ имеют параболический характер

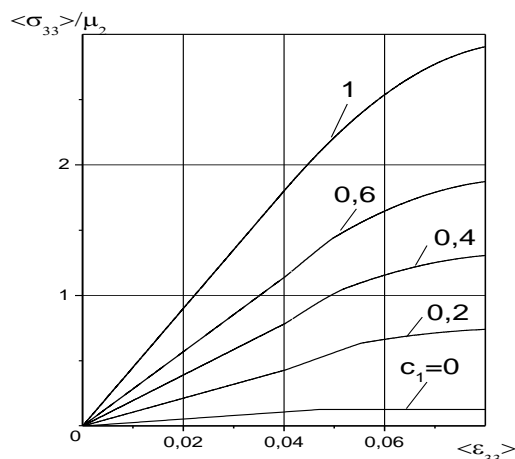


Рис. 2. Зависимости макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$ от макродеформации $\langle \epsilon_{33} \rangle$ для слоистого материала при различных объемных концентрациях наполнителя c_1 .

Выводы. В данной работе проведено исследование нелинейного деформирования слоистых материалов при нелинейном деформировании слоев. Построена модель нелинейного деформирования слоистых композитных материалов, разработан алгоритм определения напряженно-деформированного состояния и эффективных деформативных свойств слоистого материала с физически нелинейными слоями, а также исследованы зависимости деформирования слоистого материала от объемного содержания наполнителя. Установлено, что физическая нелинейность слоев оказывает существенное влияние на характер диаграмм деформирования для всех значениях объемного содержания наполнителя. В отличие от случая линейного деформирования слоев, когда зависимости макронапряжений от макродеформаций являются линейными, и от случая, когда нелинейным является только связующее и влияние нелинейности прослеживается только при объемных содержаниях наполнителя $c_1 \ll 1$, в данном случае слоистый материал за пределом упругости деформируется по параболическому закону при всех объемных концентрациях наполнителя c_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Каудерер Г. Нелинейная механика. URL: <https://www.razym.org/naukaobraz/disciplini/fizika/277596-kauderer-g-nelineynaya-mekhanika.html> . (дата звернення 6.11.2020).
2. Михеев С.В., Строганов Г.Б., Ромашин А.Г. Керамические и композиционные материалы в авиационной технике. М.: Альтекс, 2002. 276 с.
3. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред. *Прикладная механика*. 1978. Т. 14, № 2. С. 3–17.
4. Хорошун Л.П. Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов. *Прикладная механика*. 1987. Т. 23, № 10. 100–108.
5. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикуча Е.Н., Назаренко Л.В. Механика композитов: В 12-х т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т.3 Статистическая механика и эффективные свойства материалов. К.: Наук. думка, 1993. 390 с.
6. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Михайлова М.И., Бабич Д.В., Шикуча Е.Н. Механика композитов: В 12 т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т. 12: Прикладные исследования. К.: «А.С.К.», 2003. 398 с.
7. Хорошун Л.П., Шикуча Е.Н., Деформирование физически нелинейных стохастических композитных материалов. Деформирование и кратковременная повреждаемость физически нелинейных стохастических

композитных материалов / Успехи механики: В 6-ти томах / под редакцией А.Н.Гузя. / Том 6 (книга 2). К.: Литера ЛТД, 2011. 832 с. С. 161–191, 436–463.

8. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. URL: <https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=шермергор+т.д.+теория+упругости+микронеоднородных>. (дата звернення 6.11.2020).
9. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-term microdamageability of laminated materials under thermal actions. *International Applied Mechanics*. 2002. V. 38. N 4. P. 432-439.
10. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Influence of physically nonlinear deformation on short-term microdamage of a laminar material. *International Applied Mechanics*. 2004. V. 40. N 8. P. 656-663.
11. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation of a laminated composite with a physically nonlinear reinforcement and microdamageable matrix. *International Applied Mechanics*. 2005. V. 41. N 11. P. 1131-1138.
12. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-term microdamage of laminated material with nonlinear matrix and microdamaged reinforcement. *International Applied Mechanics*. 2005. V. 41. N 12. P. 1246-1253.
14. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-term microdamage of a physically nonlinear laminate under simultaneous normal and tangential loads. *International Applied Mechanics*. 2007. V. 43. N 4. P. 409-417.
15. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation of physically nonlinear stochastic composites. *International Applied Mechanics*. 2008. V. 44. N 12. P. 1325-1351.
16. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and short-term damage of physically nonlinear stochastic composites. *International Applied Mechanics*. 2009. V. 45. N 6. P. 1204-1232.
17. L.P., Shikula E.N. Deformation and damage of composite materials of stochastic structures: physically nonlinear problems. *International Applied Mechanics*. 2012. V. 48. N 4. P. 359-413.
18. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Coupled processes of deformation and long-term damage of physically nonlinear laminated materials. *International Applied Mechanics*. 2013. V. 49. N 6. P. 650-657.

REFERENCES

1. Kauderer G. *Nelinejnaya mekhanika. [Non-linear mechanics]*. Retrieved from http://ssily.ru/admin/uploads/states/file/aktivnyie_filtryi_garmonik_rus.pdf (Accessed 18 May 2014).
2. Mikheev S.V., Stroganov G.B., & Romashin A.G. (2002) *Keramicheskiye i kompozitsionnyye materialy v aviatsionnoy tekhnike. [Ceramic and composite materials in aeronautical engineering]*. Moskva: Alteks.
3. Khoroshun L.P. (1978). Metodyi teorii sluchaynykh funktsiy v zadachah o makroskopicheskikh svoystvakh mikroneodnorodnykh sred [Methods of the theory of random functions in problems of macroscopic properties of microinhomogeneous media]. *Prikladnaya mehanika - Applied Mechanics*. Vol. 14, 2, 3–17.
4. Khoroshun L.P. (1987). Metod uslovnnykh momentov v zadachah mehaniki kompozitnykh materialov [The method of conditional moments in the problems of mechanics of composite materials]. *Prikladnaya mehanika - Applied Mechanics*. Vol. 23, 10. 100–108.
5. Khoroshun L.P., Maslov B.P., Shikula E.N., & Nazarenko L.V. (1993) *Mehanika kompozitov. (Vols. 1-12). Vol. 3. Statisticheskaya mehanika i effektivnyye svoystva materialov [Mechanics of composites. (Vols. 1-12). Vol. 3. Statistical mechanics and effective properties of materials]*. K.: Nauk. Dumka.
6. Guz A.N., Khoroshun L.P., Mihaylova M.I., Babich D.V., Shikula E.N. (2003) *Mehanika kompozitov. (Vols. 1-12). Vol. 12. Prikladnyie issledovaniya [Mechanics of composites. (Vols. 1-12). Vol. 12. Applied research]*. K.: «A.S.K.»
7. Khoroshun L.P., Shikula E.N., (2011) Deformirovaniye fizicheskii nelineynykh stohasticheskikh kompozitnykh materialov. Deformirovaniye i kratkovremennaya povrezhdaemost fizicheskii nelineynykh stohasticheskikh kompozitnykh materialov [The deformation of physically nonlinear stochastic composite materials. Deformation and short-term damage of physically nonlinear stochastic composite materials]. *Uspehi mehaniki - (Vols. 1-6; Vol. 6.2)*. K.: Litera LTD.
8. Shermergor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Theory of elasticity of microinhomogeneous media]*. Retrieved from <https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=шермергор+т.д.+теория+упругости+микронеоднородных>. (Accessed 28 November 2012).
9. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2002). Short-term microdamageability of laminated materials under thermal actions // *International Applied Mechanics*. V. 38. N 4. P. 432-439. (in English).
10. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2004). Influence of physically nonlinear deformation on short-term microdamage of a laminar material // *International Applied Mechanics*. V. 40. N 8. P. 656-663. (in English).
11. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2005). Deformation of a laminated composite with a physically nonlinear reinforcement and microdamageable matrix // *International Applied Mechanics*. V. 41. N 11. P. 1131-1138. (in English).
12. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2005). Short-term microdamage of laminated material with nonlinear matrix and microdamaged reinforcement // *International Applied Mechanics*. V. 41. N 12. P. 1246-1253. (in English).
14. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2007). Short-term microdamage of a physically nonlinear laminate under simultaneous normal and tangential loads // *International Applied Mechanics*. V. 43. N 4. P. 409-417. (in English).
15. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2008). Deformation of physically nonlinear stochastic composites // *International Applied Mechanics*. 2008. V. 44. N 12. P. 1325-1351. (in English).
16. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2009). Deformation and short-term damage of physically nonlinear stochastic composites // *International Applied Mechanics*. V. 45. N 6. P. 1204-1232. (in English).

17. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2012). Deformation and damage of composite materials of stochastic structures: physically nonlinear problems // International Applied Mechanics. V. 48. N 4. P. 359-413. (in English).

18. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2013). Coupled processes of deformation and long-term damage of physically nonlinear laminated materials // International Applied Mechanics. V. 49. N 6. P. 650-657. (in English).

Елена Шикула, д.ф.-м.н.
(профессор кафедри Комп'ютерних наук Государственного университета телекоммуникаций)

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Предложена модель нелинейного деформирования слоистых материалов с физически нелинейными слоями. Построен алгоритм для определения их эффективных деформативных свойств и напряженно-деформированного состояния. Исследовано нелинейное деформирование слоистых материалов. Получены кривые деформирования для простого нагружения. Изучено влияние нелинейности слоев на деформирование материала. Установлено, что нелинейность слоев существенно влияет на эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние слоистых материалов.

Ключевые слова: слоистый материал, нелинейное деформирование слоев, напряженно-деформированное состояние, эффективные деформативные свойства, влияние нелинейности

Elena Shikula, Doctor in Physical and Mathematical Sciences
(Professor of the Department of Computer Science, State University of Telecommunications)

NONLINEAR DEFORMATION OF GRANULAR COMPOSITES

The model of nonlinear deformation of a layered material with physically nonlinear layers is proposed. The laminate is considered a two-component material with random layers. The basis is the stochastic differential equations of the physically nonlinear theory of elasticity L.P. Khoroshun. The solution to the problem of the stress-strain state and effective properties of the composite material is constructed by the averaging method. An algorithm for determining the effective deformable properties of a layered material with physically nonlinear layers has been developed. The solution of nonlinear equations taking into account their physical nonlinearity is constructed by an iterative method. The law of the relationship between macrostresses and macrostrains in a layered material and the dependence of average strains and stresses in its layers on macrostrains has been established. Curves of material deformation are plotted for different values of the volumetric content of its filler. The dependence of the effective deformative properties of the laminated material on the volumetric content of the filler has been studied. The effect of nonlinearity of layers on the deformation of a layered composite material is investigated. It was found that the nonlinearity of the layers significantly affects the effective deformative properties and the stress-strain state of laminated materials.

Keywords: laminated material, nonlinear deformation of layers, stress-strain state, efficient deformative properties, influence of nonlinearity