

УДК 539.3

Олена Шикунда^{1*}

¹ Професор кафедри Комп'ютерних наук, Державний університет телекомунікацій, вулиця Солом'янська, 7, Київ, 03110, Україна. ORCID: 0000-0002-7385-2816

* Автор, відповідальний за листування: ensh@ukr.net

МОДЕЛЬ ДЕФОРМУВАННЯ ВОЛОКНИСТИХ МАТЕРІАЛІВ БАГАТОСПРЯМОВАНОГО АРМУВАННЯ З РОЗОРІЄНТОВАНИМИ ВОЛОКНАМИ

Запропоновано модель деформування волокнистих матеріалів багатоспрямованого армування з розорієнтованими волокнами. Розв'язок задачі будується в два етапи. На першому етапі за відомими властивостями волокон і матриці визначаються ефективні термopружні властивості і напружено-деформований стан підсистеми з волокнами, орієнтованими відносно основної системи координат певним чином. В основу покладено стохастичні диференційні рівняння теорії термopружності із застосуванням методу умовних моментів. На другому етапі за допомогою заданої функції розподілу на основі схеми Фойхта будується модель деформування всієї системи за визначеними властивостями підсистем. Отримані криві деформування для простого навантаження і досліджено деформування матеріалів при рівномірному розорієнтуванні волокон. Встановлено, що волокнистий композитний матеріал з розорієнтованими волокнами в макрооб'ємі є ізотропним, а його ефективні термopружні постійні суттєво залежать від об'ємного вмісту волокон.

Ключові слова: *волокнистий матеріал багатоспрямованого армування, рівномірне розорієнтування волокон, напружено-деформований стан, ефективні термopружні властивості, комп'ютерна реалізація.*

Вступ. Композитні матеріали на основі безперервних волокон і зв'язуючої їх матриці за характером орієнтації волокон можна розділити на три групи: односпрямовані, різноспрямовані в одній площині і просторово-орієнтовані. Багатоспрямованість волокон дозволяє забезпечити необхідну жорсткість і міцність композиту в різних напрямках, що вигідно відрізняє ці матеріали від односпрямованих. Тому волокнисті матеріали з волокнами, розорієнтованими в площині, тобто шарувато-волокнисті матеріали, а також більш пріоритетні і менш досліджені просторово розорієнтовані матеріали знаходять широке застосування в багатьох галузях, де потрібні легкі та міцні конструкції, зокрема в будівництві транспортних засобів.

Аналіз останніх досліджень і постановка проблеми. Прогнозування властивостей матеріалів, армованих просторово-орієнтованими волокнами, в теоретичному плані є задачею, значно складнішою в порівнянні з односпрямованими волокнистими матеріалами. Застосування методів регуляризації структури [1, 2] в цьому випадку призводить до необхідності розв'язування просторових задач механіки і задоволення граничних умов на суттєво складній границі сполучення компонентів. Тому в більшості розрахунків користуються двома наближеними підходами [3-5]. Один з них заснований

на послідовному застосуванні моделі односпрямованого волокнистого матеріалу. Відповідно до цього підходу на першому етапі визначаються ефективні властивості композиту, утвореного початковою матрицею і волокнами одного напрямку. Цей композит служить матрицею для розрахунку ефективних властивостей на другому етапі, де враховуються волокна наступного напрямку, і т.д.

Другий наближений підхід заснований на застосуванні модифікованої схеми Фойхта або Рейса, згідно з якою просторово-армований матеріал розглядається як сукупність підсистем, кожна з яких є односпрямованим волокнистим композитом. На першому етапі визначаються властивості підсистем по відомим властивостям волокон і матриці, на другому за схемою Фойхта або Рейса – властивості всієї системи по відомим властивостям підсистем. В обох підходах обчислення властивостей односпрямованого волокнистого матеріалу, як правило, проводять на основі схеми Фойхта або Рейса, що вносить додаткові похибки.

В роботах Л.П. Хорошуна і О.М.Шикили [6, 7] побудована модель деформування просторово-армованих матеріалів при характерних видах просторового армування: волокна розташовані паралельно координатним осям, по діагоналях куба, а також уздовж сторін рівностороннього трикутника і по нормалі до нього. Наближене визначення ефективних пружних характеристик просторово-армованих матеріалів проводилося в два етапи. На першому етапі визначалися властивості підсистем, орієнтованих певним чином щодо осей основної системи координат. Розв'язання задачі першого етапу здійснювалося на основі моделі односпрямованого волокнистого матеріалу стохастичної структури [7-11]. На другому етапі за схемою Фойхта або Рейса визначалися властивості всієї системи по відомим властивостям підсистем.

Мета і завдання дослідження. Метою даної роботи є дослідження деформування просторово-армованих матеріалів з розорієнтованими волокнами. Завданнями дослідження є побудова моделі деформування просторово-армованих матеріалів з розорієнтованими волокнами, визначення напружено-деформованого стану і ефективних термопружних властивостей таких композитних матеріалів, а також дослідження залежності деформування композиту від об'ємного вмісту компонентів.

Розв'язок задачі будується в два етапи. На першому етапі за відомими властивостями волокон і матриці визначаються властивості підсистеми з волокнами, орієнтованими щодо основної системи координат певним чином. В основу покладено стохастичні диференційні рівняння теорії пружності із застосуванням методу умовних моментів [7, 12, 13]. На другому етапі за допомогою заданої функції розподілу визначаються ефективні властивості всієї системи за обчисленими властивостями підсистем. Розв'язок базується на схемі Фойхта.

Матеріали і методи дослідження. Розглянемо просторово армований волокнистий матеріал стохастичною структури, що є системою волокон N напрямків, пов'язаних матрицею. Цей матеріал будемо розглядати як багатокомпонентний, вважаючи, що матриця і волокна кожного напрямку є окремими компонентами. Будемо вважати, що в кожному напрямку є досить велика кількість статистично розташованих волокон, матеріал волокон - трансверсально-ізотропний з віссю симетрії уздовж волокон, матеріал матриці - ізотропний. Волокна k -го напрямку характеризуються напрямними косинусами (рис. 1)

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k; \gamma_2^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k; \gamma_3^{(k)} = \cos \theta_k \\ (0 \leq \theta_k &\leq \pi/2; 0 \leq \varphi_k \leq 2\pi; k = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (1)$$

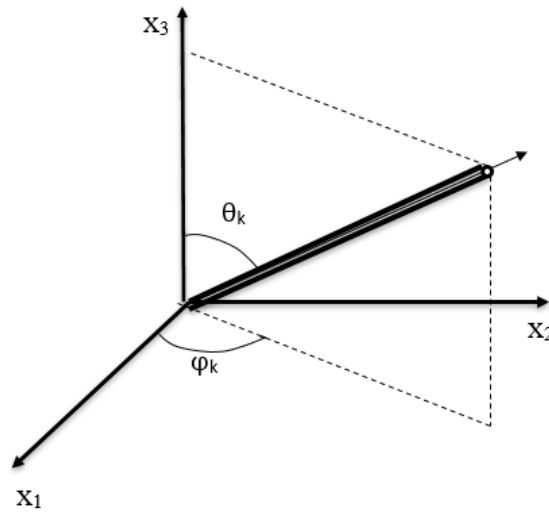


Рис. 1. Напрямні косинуси волокон k -го напрямку

Нехай об'ємні вмісти волокон k -го напрямку і матриці дорівнюють відповідно c_{1k} і c_2 . Загальна концентрація волокон $c_1 = \sum_{k=1}^N c_{1k}$, причому $c_1 + c_2 = 1$. Визначення ефективних постійних матеріалу будемо проводити в два етапи. На першому етапі визначаються ефективні властивості підсистеми, що є односпрямованим волокнистим матеріалом, утвореним волокнами k -го напрямку і частиною матриці з об'ємним вмістом $c_{2k} = \frac{c_2}{c_1} c_{1k}$. На другому етапі визначаємо ефективні властивості всієї системи за обчисленими властивостями підсистем. Розв'язання задачі першого етапу будемо проводити на основі моделі односпрямованого волокнистого матеріалу стохастичною структури, другого - на основі схеми Фойхта.

Визначення ефективних термопружних властивостей підсистеми, що є односпрямованим волокнистим матеріалом. Нехай макрооб'єм волокнистого матеріалу просторового армування знаходиться в умовах однорідних навантаження і нагріву. Позначимо термопружні постійні волокон k -го напрямку $\lambda_{ij}^{(k)}$, $\beta_i^{(k)}$, а матриці λ_2 , μ_2 , β_2 . Будемо виходити з рівнянь рівноваги в мікроточці

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} = 0, \quad (2)$$

співвідношень термопружності

$$\begin{aligned} \sigma_{pq}^{(k)} &= (\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)}) \varepsilon_{pq}^{(k)} + (\lambda_{12}^{(k)} \varepsilon_{rr}^{(k)} + \lambda_{13}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)}) \delta_{pq} - \beta_1^{(k)} \theta \delta_{pq}; \\ \sigma_{33}^{(k)} &= \lambda_{13}^{(k)} \varepsilon_{rr}^{(k)} + \lambda_{33}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)} - \beta_3^{(k)} \theta; \quad \sigma_{p3}^{(k)} = 2\lambda_{44}^{(k)} \varepsilon_{p3}^{(k)} \quad (p, q, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (3)$$

і співвідношень Коші

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = u_{(i,j)}^{(k)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}). \quad (4)$$

Підставивши (3), (4) в (2), приходимо до статистично нелінійних рівнянь рівноваги відносно переміщень $u_i^{(k)}$ в підсистемі

$$\begin{aligned} & [(\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)})u_{m,r}^{0(k)}]_{,r} + [(\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)})u_{r,r}^{0(k)}]_{,m} = \\ & = -2[\lambda_{12}^{(k)} \langle \varepsilon_{rr} \rangle^{(k)} \delta_{ml} + (\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)}) \langle \varepsilon_{ml} \rangle^{(k)} \lambda_{13}^{(k)} \langle \varepsilon_{33} \rangle^{(k)} \delta_{ml} - \beta_1^{(k)} \theta \delta_{ml}]_{,l}; \\ & (\lambda_{44}^{(k)} (u_{3,r}^{0(k)})_{,r})_{,r} = -(2\lambda_{44}^{(k)} \langle \varepsilon_{m3} \rangle^{(k)})_{,m} \quad (m, l, r = 1, 2, p = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (5)$$

Флуктуації переміщень дуже малі в порівнянні з їх середніми значеннями при $x_j \rightarrow \infty$, тому на нескінченності флуктуації переміщень приймаємо рівними нулю.

Усереднюючи співвідношення (3), отримуємо вирази для середніх напружень у вигляді

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{pq} \rangle^{(k)} & = c_1^{(k)} (\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)}) \langle \varepsilon_{pq}^1 \rangle^{(k)} + c_1^{(k)} (\lambda_{12}^{(k)} \langle \varepsilon_{rr}^1 \rangle^{(k)} + \lambda_{13}^{(k)} \langle \varepsilon_{33}^1 \rangle^{(k)}) \delta_{pq} + \\ & + c_2^{(k)} \lambda_2 \langle \varepsilon_{ss}^2 \rangle^{(k)} \delta_{pq} + 2c_2^{(k)} \mu_2 \langle \varepsilon_{pq}^2 \rangle^{(k)} - \beta_1^{(k)} \theta \delta_{pq}; \\ \langle \sigma_{33} \rangle^{(k)} & = c_1^{(k)} \lambda_{13}^{(k)} \langle \varepsilon_{rr}^1 \rangle^{(k)} + c_1^{(k)} \lambda_{33}^{(k)} \langle \varepsilon_{33}^1 \rangle^{(k)} + c_2^{(k)} \lambda_2 \langle \varepsilon_{ss}^2 \rangle^{(k)} + 2c_2^{(k)} \mu_2 \langle \varepsilon_{33}^2 \rangle^{(k)} - \beta_3^{(k)} \theta; \\ \langle \sigma_{p3} \rangle^{(k)} & = 2c_1^{(k)} \lambda_{44}^{(k)} \langle \varepsilon_{p3}^1 \rangle^{(k)} + 2c_2^{(k)} \mu_2 \langle \varepsilon_{p3}^2 \rangle^{(k)} \quad (p, q, r = 1, 2, s = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (6)$$

Скориставшись функцією Гріна, рівняння (5) можна привести до інтегральної форми. За допомогою методу умовних моментів [7, 12, 13], усереднюючи ці рівняння за умовною щільністю, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно середніх деформацій компонентів в підсистемі. Визначимо з цієї системи середні деформації компонентів в підсистемі $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(k)}$ і $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(k)}$ як функції середніх деформацій композиту $\langle \varepsilon_{ij} \rangle^{(k)}$ і підставимо в вираз (6). В результаті отримаємо залежність макронапружень в підсистемі від макродеформацій в ній і температури

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{pq} \rangle^{(k)} & = (\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)}) \langle \varepsilon_{pq} \rangle^{(k)} + (\lambda_{12}^{(k)} \langle \varepsilon_{rr} \rangle^{(k)} + \lambda_{13}^{(k)} \langle \varepsilon_{33} \rangle^{(k)}) \delta_{pq} - \beta_1^{(k)} \theta \delta_{pq}; \\ \langle \sigma_{33} \rangle^{(k)} & = \lambda_{13}^{(k)} \langle \varepsilon_{rr} \rangle^{(k)} + \lambda_{33}^{(k)} \langle \varepsilon_{33} \rangle^{(k)} - \beta_3^{(k)} \theta; \\ \langle \sigma_{p3} \rangle^{(k)} & = 2\lambda_{44}^{(k)} \langle \varepsilon_{p3} \rangle^{(k)} \quad (p, q, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (7)$$

а вирази для ефективних постійних підсистеми мають вигляд [7-11]

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{*(k)} + \lambda_{12}^{*(k)} & = c_1^k (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)}) + 2c_2^k (\lambda_2 + \mu_2) - \frac{c_1^k c_1^k (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)} - 2\lambda_2 - 2\mu_2)^2}{2c_1^k (\lambda_2 + \mu_2) + c_2^k (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)}) + 2m^{(k)}}; \\ \lambda_{11}^{*(k)} - \lambda_{12}^{*(k)} & = c_1^k (\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)}) + 2c_2^k \mu_{2p} - \frac{c_1^k c_2^k (\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)} - 2\mu_2)^2}{2c_1^k \mu_{2p} + c_2^k (\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)}) + \frac{2m^{(k)} n^{(k)}}{n^{(k)} + 2m^{(k)}}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{13}^{*(k)} &= c_1^k \lambda_{13}^{(k)} + c_2^k \lambda_2 - \frac{c_1^k c_1^k (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)} - 2\lambda_2 - 2\mu_2)(\lambda_{13}^{(k)} - \lambda_2)}{2c_1^k (\lambda_2 + \mu_2) + c_2^k (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)}) + 2m^{(k)}}; \\
 \lambda_{33}^{*(k)} &= c_1^k \lambda_{33}^{(k)} + c_2^k (\lambda_2 + 2\mu_2) - \frac{2c_1^k c_1^k (\lambda_{13}^{(k)} - \lambda_2)^2}{2c_1^k (\lambda_2 + \mu_2) + c_2^k (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)}) + 2m^{(k)}}; \\
 \lambda_{44}^{*(k)} &= c_1^k \lambda_{44}^{(k)} + c_2^k \mu_2 - \frac{c_1^k c_2^k (\lambda_{44}^{(k)} - \mu_2)^2}{c_1^k \mu_2 + c_2^k \lambda_{44}^{(k)} + s^{(k)}}; \\
 \beta_1^{*(k)} &= c_1^k \beta_1^{(k)} + c_2^k \beta_2 - \frac{c_1^k c_1^k (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)} - 2\lambda_2 - 2\mu_2)(\beta_1^{(k)} - \beta_2)}{2c_1^k (\lambda_2 + \mu_2) + c_2^k (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)}) + 2m^{(k)}}; \\
 \beta_3^{*(k)} &= c_1^k \beta_3^{(k)} + c_2^k \beta_2 - \frac{2c_1^k c_1^k (\lambda_{13}^{(k)} - \lambda_2)(\beta_1^{(k)} - \beta_2)}{2c_1^k (\lambda_2 + \mu_2) + c_2^k (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)}) + 2m^{(k)}}; \tag{8}
 \end{aligned}$$

де

$$2m^{(k)} = c_1^k (\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)}) + 2c_2^k \mu_2; \quad 2n^{(k)} = c_1^k (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)}) + 2c_2^k (\lambda_2 + \mu_2); \quad s^{(k)} = c_1^k \lambda_{44}^{(k)} + c_2^k \mu_2, \tag{9}$$

якщо жорсткість матриці більше жорсткості волокон, і

$$2m^{(k)} = \left(\frac{c_1^k}{\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)}} + \frac{c_2^k}{2\mu_2} \right)^{-1}; \quad 2n^{(k)} = \left(\frac{c_1^k}{\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)}} + \frac{c_2^k}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \right)^{-1}; \quad s^{(k)} = \left(\frac{c_1^k}{\lambda_{44}^{(k)}} + \frac{c_2^k}{\mu_2} \right)^{-1}, \tag{10}$$

якщо жорсткість волокон більше жорсткості матриці.

Якщо властивості волокон всіх напрямків однакові, то

$$\lambda_{ij}^{(k)} = \lambda_{ij}^1; \quad \beta_i^{(k)} = \beta_i^1 \tag{11}$$

і вирази (8) – (10) від індексу k не залежать.

Визначення ефективних термопружних властивостей системи, що є волокнистим матеріалом просторового армування. Ефективні постійні (8) - (10) є компонентами тензорів модулів пружності і термічних напружень в локальній системі координат $x_i^{(k)}$, де вісь $x_3^{(k)}$ паралельна волокнам k -го напрямку. Перейдемо до загальної системи координат згідно перетворенню

$$x_i = \alpha_{ij}^{(k)} x_j^{(k)}; \quad x_i^{(k)} = \alpha_{ji}^k x_j; \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11}^{(k)} &= \cos \theta_k \cos \varphi_k; & \alpha_{12}^{(k)} &= -\sin \varphi_k; & \alpha_{13}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k; \\
 \alpha_{21}^{(k)} &= \cos \theta_k \sin \varphi_k; & \alpha_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k; & \alpha_{23}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k; \\
 \alpha_{31}^{(k)} &= -\sin \theta_k; & \alpha_{32}^{(k)} &= 0; & \alpha_{33}^{(k)} &= \cos \theta_k.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Тоді тензори модулів пружності $\lambda_{ijmn}^{*(k)}$ і термічних напружень $\beta_{ij}^{*(k)}$ в загальній системі координат виражаються через відповідні тензори $\lambda_{ijmn}^{*(k)'}$, $\beta_{ij}^{*(k)'}$ в локальній системі координат співвідношеннями

$$\lambda_{ijmn}^{*(k)} = \alpha_{ip}^{(k)} \alpha_{jq}^{(k)} \alpha_{mr}^{(k)} \alpha_{ns}^{(k)} \lambda_{pqrs}^{*(k)'}, \quad \beta_{ij}^{*(k)} = \alpha_{ip}^{(k)} \alpha_{jq}^{(k)} \beta_{pq}^{*(k)'}. \tag{14}$$

Ефективні постійні всієї системи відповідно до схеми Фойхт визначаються формулами

$$\lambda_{ijmn}^{**k} = \frac{1}{c_1} \sum_{k=1}^N c_{1k} \lambda_{ijmn}^{*(k)}; \quad \beta_{ij}^{**k} = \frac{1}{c_1} \sum_{k=1}^N c_{1k} \beta_{ij}^{*(k)}. \quad (15)$$

Підставляючи (15) в (14) і переходячи до матричних позначень, отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda_{ijmn}^{**} &= \frac{1}{c_1} \sum_{k=1}^N c_{1k} \{ [\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)} \alpha_{m1}^{(k)} \alpha_{n1}^{(k)} + \alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)} \alpha_{m2}^{(k)} \alpha_{n2}^{(k)} + \\ &+ \frac{1}{2} (\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)} + \alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)}) (\alpha_{m1}^{(k)} \alpha_{n2}^{(k)} + \alpha_{m2}^{(k)} \alpha_{n1}^{(k)})] \lambda_{11}^{*(k)} + \\ &+ [\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)} \alpha_{m2}^{(k)} \alpha_{n2}^{(k)} + \alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)} \alpha_{m1}^{(k)} \alpha_{n1}^{(k)} - \\ &- \frac{1}{2} (\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)} + \alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)}) (\alpha_{m1}^{(k)} \alpha_{n2}^{(k)} + \alpha_{m2}^{(k)} \alpha_{n1}^{(k)})] \lambda_{12}^{*(k)} + \\ &+ \alpha_{i3}^{(k)} \alpha_{j3}^{(k)} \alpha_{m3}^{(k)} \alpha_{n3}^{(k)} \lambda_{33}^{*(k)} + [(\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)} + \alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)}) \alpha_{m3}^{(k)} \alpha_{n3}^{(k)} + \alpha_{i3}^{(k)} \alpha_{j3}^{(k)} (\alpha_{m1}^{(k)} \alpha_{n1}^{(k)} + \alpha_{m2}^{(k)} \alpha_{n2}^{(k)})] \lambda_{13}^{*(k)} + \\ &+ [(\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j3}^{(k)} + \alpha_{i3}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)}) (\alpha_{m1}^{(k)} \alpha_{n3}^{(k)} + \alpha_{m3}^{(k)} \alpha_{n1}^{(k)}) + (\alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j3}^{(k)} + \alpha_{i3}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)}) (\alpha_{m2}^{(k)} \alpha_{n3}^{(k)} + \alpha_{m3}^{(k)} \alpha_{n2}^{(k)})] \lambda_{44}^{*(k)} \}; \\ \beta_{ij}^{**} &= \frac{1}{c_1} \sum_{k=1}^N c_{1k} [(\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)} + \alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)}) \beta_1^{*(k)} + \alpha_{i3}^{(k)} \alpha_{j3}^{(k)} \beta_3^{*(k)}]. \quad (16) \end{aligned}$$

Формули (8) - (10), (16) визначають ефективні термопружні властивості просторово армованого матеріалу через властивості волокон і матриці. Якщо властивості волокон і їх об'ємний вміст в кожному напрямку однакові, то

$$c_{1k} = \frac{c_1}{N}; \quad \lambda_{ij}^{*(k)} = \lambda_{ij}^*; \quad \beta_i^{*(k)} = \beta_i^*, \quad (17)$$

що спрощує обчислення.

Визначення ефективних термопружних властивостей волокнистих матеріалів просторового армування з розорієнтованими волокнами. В випадку, коли волокна розорієнтовані в просторі з функцією розподілу $f(\theta, \varphi)$, ефективні термопружні постійні визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{ijmn}^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi) \lambda_{pqrs}^* d\theta d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi) \alpha_{ip}^{(k)} \alpha_{jq}^{(k)} \alpha_{mr}^{(k)} \alpha_{ns}^{(k)} \lambda_{pqrs}^{*'} d\theta d\varphi; \\ \beta_{ij}^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi) \beta_{pq}^* d\theta d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta, \varphi) \alpha_{ip}^{(k)} \alpha_{jq}^{(k)} \beta_{pq}^{*'} d\theta d\varphi; \quad (18) \end{aligned}$$

Якщо волокна рівномірно розорієнтовані в просторі, то функція розподілу має вигляд

$$f(\theta, \varphi) = 1. \quad (19)$$

Підставляючи (19) в (18) з урахуванням (16) отримуємо ізотропний матеріал, у якого залежності макронапружень від макродеформацій і температури визначаються за формулами

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda^{**} \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{ij} + 2\mu^{**} \langle \varepsilon_{ij} \rangle - \beta^{**} \theta \delta_{ij}, \quad (20)$$

де пружні постійні мають вигляд

$$\begin{aligned} \lambda^{**} &= \frac{1}{45} [9(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) - 12(\lambda_{44}^* + \lambda_{66}^*) + 24\lambda_{13}^* + 3\lambda_{33}^*]; \\ \mu^{**} &= \frac{1}{30} [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) + 12(\lambda_{44}^* + \lambda_{66}^*) - 4\lambda_{13}^* + 2\lambda_{33}^*]; \end{aligned} \quad (21)$$

а λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* , λ_{66}^* визначаються за формулами (8) – (11), (17).

Чисельне дослідження деформування волокнистих композитних матеріалів з розорієнтованими волокнами. За допомогою комп'ютерного моделювання було проведено чисельне дослідження залежності деформування волокнистого композиту з рівномірно розорієнтованими волокнами від об'ємного вмісту компонентів. Як компоненти взяті відповідно високомодульні вуглецеві волокна з характеристиками [14]

$$E_1^1 = 8 \text{ ГПа}; \quad E_3^1 = 226 \text{ ГПа}; \quad \nu_{12}^1 = 0,3; \quad \nu_{13}^1 = 0,2; \quad G_{13}^1 = 60 \text{ ГПа}; \quad (22)$$

об'ємним вмістом $c_1 = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$ і епоксидна матриця з характеристиками [15]

$$E_2 = 3 \text{ ГПа}; \quad \nu_2 = 0,35, \quad (23)$$

де E_2 , ν_2 – відповідно модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матриці; E_1^1 і E_3^1 , ν_{12}^1 і ν_{13}^1 , G_{12}^1 і G_{13}^1 – відповідно поперечний і поздовжній модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона і модулі зсуву волокон, які пов'язані з λ_{11}^1 , λ_{12}^1 , λ_{13}^1 , λ_{33}^1 , λ_{44}^1 формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 &= E_1^1 E_3^1 \left[E_3^1 \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right) - 2E_1^1 (\nu_{13}^1)^2 \right]^{-1}; \quad \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 = G_{12}^1; \\ \lambda_{13}^1 &= \nu_{13}^1 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1); \quad \lambda_{33}^1 = (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) \frac{E_3^1}{E_1^1} \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right); \quad \lambda_{44}^1 = G_{13}^1. \end{aligned} \quad (24)$$

На рис. 2 показані графіки залежностей макронапруження $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ від макродеформації $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для різних об'ємних вмістів волокон c_1 . На рис. 3-5 показані криві залежностей відповідно ефективних модуля Юнга E^{**} , коефіцієнта Пуассона ν^{**} і модуля зсуву G^{**} від c_1 . Графіки показують, що залежності $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ від $\langle \varepsilon_{11} \rangle$, криві E^{**} , ν^{**} , G^{**} істотно залежать від об'ємного вмісту волокон c_1 .

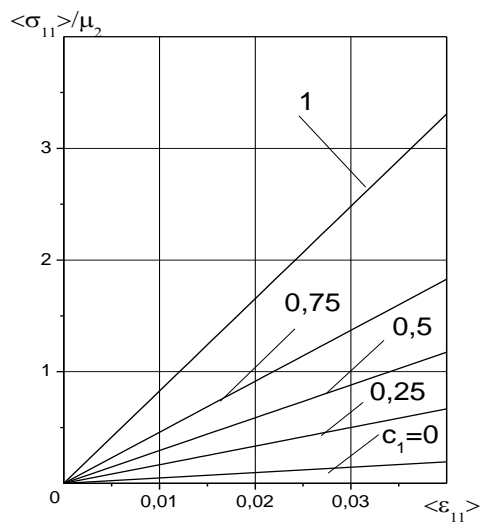


Рис. 2. Залежності макронапруження $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ від макродеформації $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для різних об'ємних вмістів волокон c_1

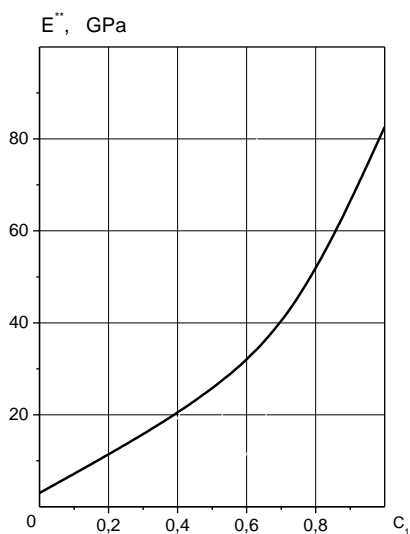


Рис. 3. Залежність ефективного модуля Юнга E^{**} від об'ємного вмісту волокон c_1

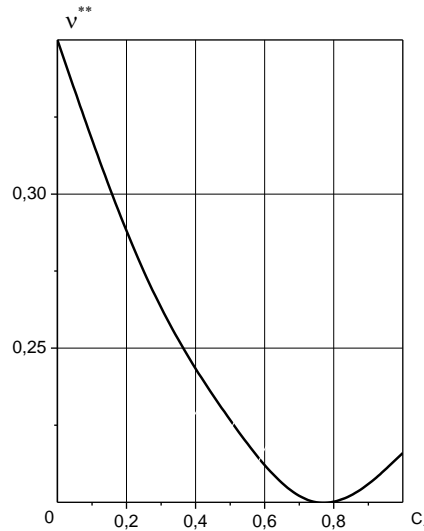


Рис. 4. Залежність ефективного коефіцієнту Пуассона ν^{**} від об'ємного вмісту волокон c_1

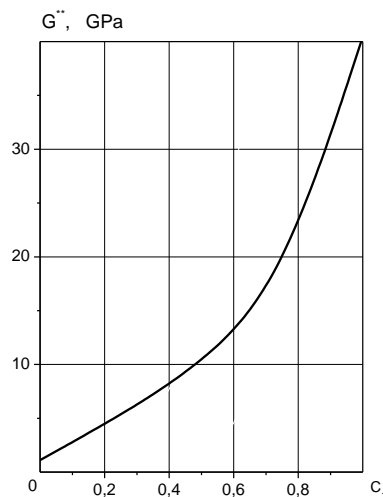


Рис. 5. Залежність ефективного модуля зсуву G^{**} від об'ємного вмісту волокон c_1

Висновки. В даній роботі побудовано модель деформування просторово-армованих матеріалів з розорієнтованими волокнами, визначено напружено-деформований стан та ефективні термопружні властивості таких композитних матеріалів, а також досліджено залежності деформування композиту від об'ємного вмісту волокон. Встановлено, що волокнистий композитний матеріал з розорієнтованими волокнами в макрооб'ємі є ізотропним, а його ефективні термопружні постійні істотно залежать від об'ємного вмісту волокон.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ванін Г.А. Микромеханика композиционных материалов. URL: https://www.studmed.ru/vanin-g-a-mikromehanika-kompozicionnyh-materialov_cbf1b78c52e.html (дата звернення 26.04.2021).
2. Головчан В.Т. Анизотропия физико-механических свойств композитных материалов. Киев, Наук.думка, 2007. 301 с.
3. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Т.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. <https://www.twirpx.com/file/1302249/grant/> (дата звернення 26.04.2021).
4. Скудра А.М., Булавс В.Я. Прочность армированных пластиков. Рига, Зинатне, 2001. 240 с.
5. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно армированные композиционные материалы. URL: <https://www.twirpx.com/file/461655/> (дата звернення 26.04.2021).
6. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Thermoelastic properties of spatially reinforced materials // *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, N 1. P. 13-20. .
7. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикула Е.Н., Назаренко Л.В. Механика композитов: В 12-х т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т.3 Статистическая механика и эффективные свойства материалов. К.: Наук. думка, 2003. 390 с.
8. Хорошун Л. П., Шикула Е.Н. Нелинейные деформативные свойства дисперсно-упрочненных материалов // *Механика композитных материалов*. 2002. Т. 38, № 4. С. 473-486.
9. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and long-term damage of physically nonlinear fibrous materials // *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, N 1. P. 58-67.
10. Хорошун Л. П., Шикула Е.Н. Ефективні деформівні властивості волокнистих композитних матеріалів при нелінійному деформуванні компонентів // *Доповіді Національної академії наук України*. 2016. № 6. С. 47 – 55.
11. Шикула Е.Н., Хорошун Л. П. Нелинейное деформирование волокнистых материалов // *Водний транспорт. Збірник наукових праць Київської державної академії водного транспорту імені гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного*. К.: КДАВТ, 2016. № 2 (25). С. 29 - 36.
12. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред. URL: <https://www.twirpx.com/file/1118540/grant/> (дата звернення 26.04.2021).
13. Хорошун Л.П. Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов // *Прикладная механика*. 2007. Т. 43, № 10. С. 100–108.
14. Крегерс А. Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // *Механика композитных материалов*. 2008. № 3. С. 433-441.
15. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Михайлова М.И., Бабич Д.В., Шикула Е.Н. Механика композитов: В 12 т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т. 12: Прикладные исследования. К: «А.С.К.», 2003. 398 с.

REFERENCES

1. Vanin G.A. *Mikromehanika kompozicionnyh materialov*. [Micromechanics of composite materials]. Retrieved from https://www.studmed.ru/vanin-g-a-mikromehanika-kompozicionnyh-materialov_cbf1b78c52e.html (rus). Pdf (Accessed 28 December 2012).
2. Golovchan V.T. (2007) *Anizotropija fiziko-mehaničeskikh svojstv kompozitnyh materialov*. [Anisotropy of the physical and mechanical properties of composite materials]. Kiev, Nauk.dumka.
3. Malmejster A.K., Tamuzh V.P., Teters T.A. *Soprotivlenie polimernyh i kompozitnyh materialov*. [Resistance of polymer and composite materials]. Retrieved from <https://www.twirpx.com/file/1302249/grant/> (rus). Djvi (Accessed 13 December 2013).
4. Skudra A.M., Bulavs V.Ja. (2001) *Prochnost' armirovannyh plastikov*. [Strength of reinforced plastics]. Riga, Zinatne.
5. Tarnopol'skij Ju.M., Zhigun I.G., Poljakov V.A. *Prostranstvenno armirovannye kompozicionnye materialy*. Retrieved from <https://www.twirpx.com/file/461655/> (rus). Djvi (Accessed 21 Marth 2019).
6. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2011) Thermoelastic properties of spatially reinforced materials // *International Applied Mechanics*. Vol. 47, 1, 13-20. (in English)
7. Khoroshun L.P., Maslov B.P., Shikula E.N., & Nazarenko L.V. (2003) *Mehanika kompozitov*. (Vols. 1-12). Vol. 3. *Statističeskaya mehanika i effektivnyie svojstva materialov* [Mechanics of composites. (Vols. 1-12). Vol. 3. Statistical mechanics and effective properties of materials]. K.: Nauk. Dumka.
8. Khoroshun L. P., Shikula E.N. (2002) Nelinejnye deformativnye svojstva dispersno-uprochnennyh materialov [Nonlinear deformation properties of dispersion-hardened materials] // *Mehanika kompozitnyh materialov*. Vol. 38, 4, 473-486.
9. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2014) Deformation and long-term damage of physically nonlinear fibrous materials // *International Applied Mechanics*. Vol. 50, 1, 58-67. (in English)
10. Khoroshun L.P., Shikula O.M. (2016) Efektivni deformivni vlastyivosti voloknystykh kompozytnykh materialiv pry nelinejnomu deformuvanni komponentiv [Effective deformable properties of fibrous composite materials in nonlinear deformation of components] // *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrainy - Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*. 6, 47-55.

11. Shikula E.N., Khoroshun L. P. (2016) Nelinejnoe deformirovanie voloknistykh materialov [Nonlinear deformation of fibrous materials] // *Vodnij transport. Zbirnik naukovih prac' Kiïvs'koï derzhavnoï akademii vodnogo transportu imeni get'mana Petra Konashevicha-Sagajdachnogo. K.: KDAVT. Vol 25, 2, 29-36.*
12. Khoroshun L.P. *Metody teorii sluchaynykh funktsiy v zadachah o makroskopicheskikh svoystvah mikroneodnorodnykh sred [Methods of the theory of random functions in problems of macroscopic properties of microinhomogeneous media]*. Retrieved from : <https://www.twirpx.com/file/1118540/grant/> (rus). Djvi (Accessed 03 Juny 2018).
13. Khoroshun L.P. (2007). Metod uslovnnykh momentov v zadachah mehaniki kompozitnykh materialov [The method of conditional moments in the problems of mechanics of composite materials]. *Prikladnaya mehanika - Applied Mechanics*. Vol. 43, 10, 100-108.
14. Kregers A. F. (2008). Matematicheskoe modelirovanie termicheskogo rasshireniya prostranstvenno armiro-vannykh kompozitov // *Mehanika kompozitnykh materialov*. Vol. 24, 3, 433-441.
15. Guz A.N., Khoroshun L.P., Mihaylova M.I., Babich D.V., Shikula E.N. (2003) *Mehanika kompozitov. (Vols. 1-12). Vol. 12. Prikladnye issledovaniya [Mechanics of composites. (Vols. 1-12). Vol. 12. Applied research]*. K: «A.S.K.»

Elena Shikula^{1*}

¹ Professor of the Department of Computer Science, State University of Telecommunications, Solomenska Street, 7, Kyiv, 03110, Ukraine

*Correspondent author: ensh@ukr.net

MODEL OF DEFORMATION OF FIBROUS MATERIALS OF MULTIDIRECTIONAL REINFORCEMENT WITH NONORIENTED FIBERS

A model of deformation of multidirectional reinforcement fibrous materials with differently oriented fibers is proposed. The solution to the problem is built in two stages. At the first stage, the known properties of fibers and binder are used to determine the effective thermoelastic properties and stress-strain state of the subsystem with fibers oriented in a certain way relative to the main coordinate system. It is based on stochastic differential equations of the physically nonlinear theory of elasticity using the method of conditional moments. At the second stage, using a given distribution function based on the Voigt scheme, a model of deformation of the entire system is constructed from the calculated properties of the subsystems. Strain curves are obtained for simple loading, and the deformation of materials at uniform orientation of fibers is investigated. It was found that a fibrous composite material with differently oriented fibers in a macrovolume is isotropic, and its effective thermoelastic constants substantially depend on the volumetric content of fibers.

Keywords: *fibrous material of multidirectional reinforcement, uniform orientation of fibers, stress-strain state, effective thermoelastic properties, computer implementation.*