DOI:10.32703/2617-9040-2022-39-15

УДК 539.3

Олена Шикула[1*]

[1] Професор кафедри Комп'ютерних наук, Державний університет телекомунікацій, вул. Солом'янська, 7, Київ, Україна, 03110. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7385-2816

[*]**Автор, відповідальний за листування**: ensh@ukr.net

ПОБУДОВА МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ПРОСТОРОВО-АРМОВАНИХ ВОЛОКНИСТИХ МАТЕРІАЛІВ З РОЗОРІЄНТОВАНИМИ ВОЛОКНАМИ

Запропонована модель нелінійного деформування просторово-армованих волокнистих матеріалів з розорієнтованими волокнами і фізично нелінійною матрицею Просторово-армований волокнистий матеріал розглядається як багатокомпонентний матеріал з випадковим розташуванням волокон. В основу покладені стохастичні диференційні рівняння фізично нелінійної теорії пружності. Рішення задачі про напружено-деформівний стан та ефективні властивості композитного матеріалу будується за методом умовних моментів Л.П.Хорошуна.. Розроблений алгоритм визначення ефективних деформативних властивостей просторово-армованого матеріалу з фізично нелінійною матрицею. Рішення нелінійних рівнянь, що враховують її фізичну нелінійність, будується за ітераційним методом.

Встановлено закон зв'язку між макронапруженнями і макродеформаціями в просторово-армованому матеріалі та залежності середніх деформацій і напружень в його матриці від макродеформацій. Побудовані криві деформування матеріалу для різних значень об'ємного вмісту волокон. Вивчена залежність ефективних деформативних властивостей просторово-армованого матеріалу від об'ємного вмісту волокон. Досліджено вплив нелінійності матриці на деформування просторово-армованого композитного матеріалу. Встановлено, що нелінійність матриці суттєво впливає на ефективні деформативні властивості та напружено-деформований стан просторово-армованих матеріалів.

Ключові слова: *модель нелінійного деформування, волокнистий матеріал багатоспрямованого армування, рівномірне розорієнтування волокон, нелінійне деформування матриці, напружено-деформований стан, ефективні деформативні властивості, вплив нелінійності, комп'ютерна реалізація*

Вступ. Важлива та актуальна проблема створення безпечних та надійних елементів конструкцій для авіабудівної галузі ускладнюється необхідністю максимального зменшення ваги конструктивних елементів за умови збереження їх міцності. Це дозволяє суттєво знизити як експлуатаційні витрати, так і задовольнити жорсткі екологічні вимоги до літальних апаратів. У світовій практиці це зазвичай досягається при проектуванні на основі використання алюмінієвих сплавів (для полегшення виробів), титанових сплавів (для забезпечення міцності), а також композитних матеріалів. Тенденції сучасного авіабудування свідчать про збільшення частки використання саме композитних матеріалів. До значних переваг композитних матеріалів слід віднести їх малу щільність, високі характеристики статичної міцності та міцності при втомі, опір корозії та інші. Завдяки анізотропії деформаційно-міцностних властивостей композитних матеріалів з'являється можливість створювати ефективні матеріали із заданою структурою.

Одними з найдоступніших і недорогих композитних матеріалів, що найбільш інтенсивно використовуються в авіабудуванні, є склопластики та вуглепластики. Склопластики – вид композиційних матеріалів – пластичні матеріали, що складаються зі скловолокнистого наповнювача (скляне волокно, волокно з кварцу та ін.) та сполучної речовини (термореактивні та термопластичні полімери). Вуглепластики створюються на основі високомодульних вуглецевих волокон та полімерів. Такі матеріали поступаються сталі за абсолютними значеннями межі міцності, але у 3,5 разу легше її і перевищують сталь за питомою міцністю. При виготовленні рівноміцних конструкцій зі сталі та вугле-або склопластику, така конструкція буде в кілька разів легша за сталеву. Для надання ще більшої міцності вугле-і склопластики кладуть шарами, щоразу змінюючи кут напряму волокон. Шари скріплюються за допомогою епоксидних смол. Ще більшу жорсткість і міцність композиту у різних напрямках забезпечує багатоспрямованість волокон. Тому волокнисті матеріали з волокнами, розорієнтованими в площині, тобто шарувато-волокнисті матеріали, а також більш пріоритетні і менш досліджені просторово розорієнтовані матеріали знаходять широке застосування в багатьох галузях, де потрібні легкі та міцні конструкції, зокрема в транспортних засобах.

В зв’язку з широким застосуванням композитних матеріалів актуальним завданням є вивчення механічної поведінки композитних матеріалів під час навантаження. Поряд з експериментальними методами визначення властивостей композитних матеріалів інтенсивно розробляються теорії, присвячені вивченню їх деформування та руйнування. Проводяться дослідження щодо визначення напружено-деформованого стану, прогнозування фізико-механічних властивостей, вибору оптимальної структури композитних матеріалів.

Аналіз останніх досліджень і постановка проблеми. При збільшенні навантаження багато однорідних і композитних матеріалів проявляють нелінійний характер залежностей між макронапруженнями та макродеформаціями. Це може бути обумовлене фізичною нелінійністю деформування компонентів [1]. Такий вид нелінійності є типовим для композитів на основі пластичної металевої матриці, а також на основі полімерів при підвищених температурах.

Волокнисті матеріали з волокнами, розорієнтованими в просторі, широко використовуються в деталях транспортних засобів, що працюють в умовах високих силових та температурних навантажень. Тому прогнозування їх нелінійних властивостей є актуальним.

Методи розв’язання нелінійних задач механіки твердого деформівного тіла розроблялися в роботах Бленда Д. [2], Каудерера Г. [1], Лур’є А.І. [3], Митропольського Ю.О., Березовського А.А. [4, 5], Новожилова В.В. [6], Green A.E. & Adkins I.E. [7], Hill R. [8-9], Ogden R.W. [10-11] та ін. В більшості робіт застосовувався метод розкладання рішення за ступенями малого параметра, причому при розв’язанні конкретних задач обмежувалися, як правило, першими двома членами розкладання. В зв’язку з цим розв’язання задач про нелінійне деформування матеріалів отримано для слабо нелінійних деформацій, тобто для таких деформацій, для яких матеріал деформується за нелінійним законом, близьким до лінійного. Вивченню механічної поведінки композитних матеріалів з компонентами, що нелінійно деформуються, або матеріалів, що нелінійно деформуються, присвячені роботи Васильєва В.В. та Солдатова С.А. [12], Крегерса А.Ф. та Мелбардіса Ю.Г. [13], Малмейстер А.К. та Янсона Ю.О. [14], Хорошуна Л.П. та Маслова Б.П. [15], Цурпала І.А. [1], Hill R. [9-10], Ogden R.W. [11-12] та ін.

Розв’язання лінійної задачі про деформування стохастично неоднорідних композитів різних типів армування було отримано Хорошуном Л.П. [16, 17]. Різні аспекти деформування волокнистих та шарувато-волокнистих композитних матеріалів з нелінійною матрицею були вивчені в роботах Хорошуна Л.П., Шикули О.М. [18-28]. Однак для матеріалів просторового армування автори вивчали лише лінійне деформування [18, 29, 30]. Не було побудовано моделі деформування просторово орієнтованих волокнистих матеріалів у разі нелінійного деформування матриці.

Мета і завдання дослідження. Метою даної роботи є побудова моделі та дослідження нелінійного деформування просторово армованих волокнистих матеріалів. Завданнями дослідження є побудова моделі нелінійного деформування таких матеріалів, розробка алгоритму визначення напружено-деформованого стану та ефективних деформативних властивостей просторово армованого матеріалу з розорієнтованими волокнами та фізично нелінійною матрицею, а також дослідження залежності деформування матеріалу від об'ємного вмісту матриці. В основу покладено стохастичні диференціальні рівняння фізично нелінійної теорії пружності Л.П.Хорошуна [16-19].

Матеріали та методи дослідження. Розглянемо просторово армований волокнистий матеріал стохастичною структури, що є системою волокон N напрямків, пов'язаних матрицею. Цей матеріал будемо розглядати як багатокомпонентний, вважаючи, що матриця і волокна кожного напрямку є окремими компонентами. Будемо вважати, що в кожному напрямку є досить велика кількість статистично розташованих волокон, матеріал волокон – трансверсально-ізотропний з віссю симетрії уздовж волокон, матеріал матриці – ізотропний. Волокна k -го напрямку характеризуються напрямними косинусами (рис. 1)

$$\gamma_1^{(k)} = \sin\theta_k \cos\varphi_k ; \gamma_2^{(k)} = \sin\theta_k \sin\varphi_k ; \gamma_3^{(k)} = \cos\theta_k$$
$$(0 \le \theta_k \le \pi/2;\ 0 \le \varphi_k \le 2\pi; k = 1,2,...,N). \quad (1)$$

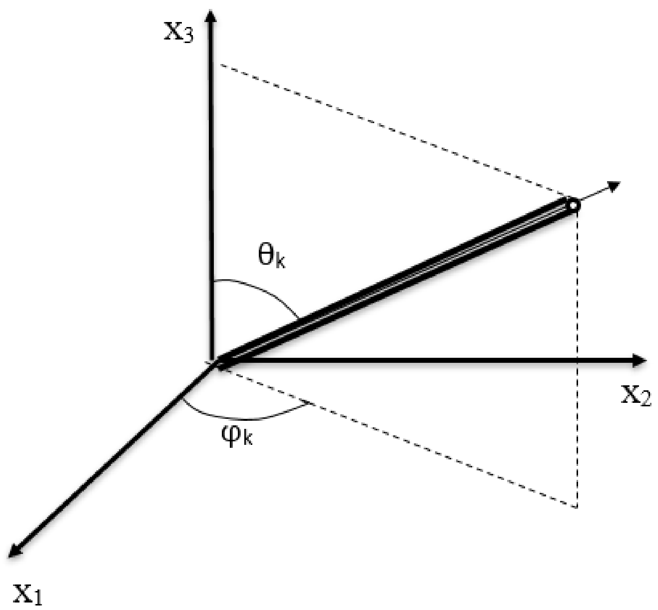

Рис. 1. **Напрямні косинуси волокон k -го напрямку**

Наближене визначення ефективних пружних характеристик просторово-армованих матеріалів будемо проводити в два етапи. На першому етапі визначаються властивості підсистем, орієнтованих певним чином щодо осей основної системи координат. Розв'язання задачі першого етапу здійснювалося на основі моделі односпрямованого волокнистого матеріалу стохастичної структури [18-27]. При цьому розв'язок базувався на стохастичних диференційних рівняннях теорії пружності із застосуванням методу умовних моментів [16-19]. На другому етапі за допомогою заданої функції розподілу визначаються ефективні властивості всієї системи за обчисленими властивостями підсистем. Розв'язок базується на схемі Фойхта.

Нехай об'ємні вмісти волокон k -го напрямку і матриці дорівнюють відповідно c_{1k} і c_2.

Загальна концентрація волокон $c_1 = \sum_{k=1}^{N} c_{1k}$, причому $c_1 + c_2 = 1$. Визначення ефективних постійних матеріалу будемо проводити в два етапи. На першому етапі визначаються ефективні властивості підсистеми, що є односпрямованим волокнистим матеріалом, утвореним волокнами k-го напрямку і частиною матриці з об'ємним вмістом $c_{2k} = \frac{c_2}{c_1} c_{1k}$. На другому етапі визначаємо ефективні властивості всієї системи за обчисленими властивостями підсистем. Розв'язання задачі першого етапу будемо проводити на основі моделі односпрямованого волокнистого матеріалу стохастичною структури, другого – на основі схеми Фойхта.

Визначення ефективних деформівних властивостей волокнистого матеріалу просторового армування. Нехай макрооб'єм волокнистого матеріалу просторового армування знаходиться в умовах однорідних навантаження. Позначимо пружні сталі волокон k-го напрямку $\lambda_{ij}^{(k)}$, а пружні коефіцієнти матриці $\lambda_2,\ \mu_2$ залежать від деформації, $\lambda_2(\varepsilon), \mu_2(\varepsilon)$. Будемо виходити з рівнянь рівноваги в мікроточці

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} = 0, \tag{2}$$

співвідношень пружності

$$\sigma_{pq}{}^{(k)} = (\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)})\varepsilon_{pq}{}^{(k)} + (\lambda_{12}^{(k)}\varepsilon_{rr}{}^{(k)} + \lambda_{13}^{(k)}\varepsilon_{33}{}^{(k)})\delta_{pq};$$
$$\sigma_{33}{}^{(k)} = \lambda_{13}^{(k)}\varepsilon_{rr}{}^{(k)} + \lambda_{33}^{(k)}\varepsilon_{33}{}^{(k)}; \qquad \sigma_{p3}{}^{(k)} = 2\lambda_{44}^{(k)}\varepsilon_{p3}{}^{(k)} \qquad (p,\ q,\ r = 1,\ 2), \tag{3}$$

і співвідношень Коші

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = u_{(i,j)}^{(k)} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}\right). \tag{4}$$

Підставивши (3), (4) в (2), приходимо до статистично нелінійних рівнянь рівноваги відносно переміщень $u_i^{(k)}$ в підсистемі

$$[(\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)})u_{m,r}^{0(k)}]_{,r} + [(\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)})u_{r,r}^{0(k)}]_{,m} =$$
$$= -2[\lambda_{12}^{(k)} < \varepsilon_{rr} >^{(k)} \delta_{ml} + (\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)}) < \varepsilon_{ml} >^{(k)} \lambda_{13}^{(k)} < \varepsilon_{33} >^{(k)} \delta_{ml}]_{,l};$$
$$(\lambda_{44}^{(k)}(u_{3,r}^{0(k)})_{,r} = -(2\lambda_{44}^{(k)} < \varepsilon_{m3} >^{(k)})_{,m} \qquad (m,\ l,\ r = 1,\ 2,\ \ p = 1,\ 2,\ 3). \tag{5}$$

Флуктуації переміщень дуже малі в порівнянні з їх середніми значеннями при $x_j \to \infty$, тому на нескінченності флуктуації переміщень приймаємо рівними нулю.

Усереднюючи співвідношення (3), отримуємо вирази для середніх напружень у вигляді

$$< \sigma_{pq} >^{(k)} = c_1^{(k)}(\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)}) < \varepsilon_{pq}^1 >^{(k)} + c_1^{(k)}(\lambda_{12}^{(k)} < \varepsilon_{rr}^1 >^{(k)} + \lambda_{13}^{(k)} < \varepsilon_{33}^1 >^{(k)})\delta_{pq} +$$
$$+ c_2^{(k)}\lambda_2 < \varepsilon_{ss}^2 >^{(k)} \delta_{pq} + 2c_2^{(k)}\mu_2 < \varepsilon_{pq}^2 >^{(k)};$$
$$< \sigma_{33} >^{(k)} = c_1^{(k)}\lambda_{13}^{(k)} < \varepsilon_{rr}^1 >^{(k)} + c_1^{(k)}\lambda_{33}^{(k)} < \varepsilon_{33}^1 >^{(k)} + c_2^{(k)}\lambda_2 < \varepsilon_{ss}^2 >^{(k)} + 2c_2^{(k)}\mu_2 < \varepsilon_{33}^2 >^{(k)};$$
$$< \sigma_{p3} >^{(k)} = 2c_1^{(k)}\lambda_{44}^{(k)} < \varepsilon_{p3}^1 >^{(k)} + 2c_2^{(k)}\mu_2 < \varepsilon_{p3}^2 >^{(k)} \qquad (p,\ q,\ r = 1,\ 2,\ \ s = 1,\ 2,\ 3), \tag{6}$$

$\lambda_2,\ \mu_2$

Скориставшись функцією Гріна, рівняння (5) можна привести до інтегральної форми. За допомогою методу умовних моментів [16-19], усереднюючи ці рівняння за умовною щільністю, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно середніх деформацій компонентів в підсистемі. Визначимо з цієї системи середні деформації компонентів в підсистемі $<\varepsilon_{ij}^1>^{(k)}$ і $<\varepsilon_{ij}^2>^{(k)}$ як функції середніх деформацій композиту $<\varepsilon_{ij}>^{(k)}$ і підставимо в вираз (6). В результаті отримаємо залежність макронапружень в підсистемі від макродеформацій в ній

$$<\sigma_{pq}>^{(k)}=(\lambda_{11}^{(k)}-\lambda_{12}^{(k)})<\varepsilon_{pq}>^{(k)}+(\lambda_{12}^{(k)}<\varepsilon_{rr}>^{(k)}+\lambda_{13}^{(k)}<\varepsilon_{33}>^{(k)})\delta_{pq};$$
$$<\sigma_{33}>^{(k)}=\lambda_{13}^{(k)}<\varepsilon_{rr}>^{(k)}+\lambda_{33}^{(k)}<\varepsilon_{33}>^{(k)};$$
$$<\sigma_{p3}>^{(k)}=2\lambda_{44}^{(k)}<\varepsilon_{p3}>^{(k)}\quad (p,\ q,\ r=1,\ 2), \tag{7}$$

а вирази для ефективних коефіцієнтів підсистеми мають вигляд [18-20]

$$\lambda_{11}^{*(k)}+\lambda_{12}^{*(k)}=c_1^k(\lambda_{11}^{(k)}+\lambda_{12}^{(k)})+2c_2^k(\lambda_2+\mu_2)-\frac{c_1^k c_1^k(\lambda_{11}^{(k)}+\lambda_{12}^{(k)}-2\lambda_2-2\mu_2)^2}{2c_1^k(\lambda_2+\mu_2)+c_2^k(\lambda_{11}^{(k)}+\lambda_{12}^{(k)})+2m^{(k)}};$$
$$\lambda_{11}^{*(k)}-\lambda_{12}^{*(k)}=c_1^k(\lambda_{11}^{(k)}-\lambda_{12}^{(k)})+2c_2^k\mu_2-\frac{c_1^k c_2^k(\lambda_{11}^{(k)}-\lambda_{12}^{(k)}-2\mu_2)^2}{2c_1^k\mu_2+c_2^k(\lambda_{11}^{(k)}-\lambda_{12}^{(k)})+\dfrac{2m^{(k)}n^{(k)}}{n^{(k)}+2m^{(k)}}};$$
$$\lambda_{13}^{*(k)}=c_1^k\lambda_{13}^{(k)}+c_2^k\lambda_2-\frac{c_1^k c_1^k(\lambda_{11}^{(k)}+\lambda_{12}^{(k)}-2\lambda_2-2\mu_2)(\lambda_{13}^{(k)}-\lambda_2)}{2c_1^k(\lambda_2+\mu_2)+c_2^k(\lambda_{11}^{(k)}+\lambda_{12}^{(k)})+2m^{(k)}};$$
$$\lambda_{33}^{*(k)}=c_1^k\lambda_{33}^{(k)}+c_2^k(\lambda_2+2\mu_2)-\frac{2c_1^k c_1^k(\lambda_{13}^{(k)}-\lambda_2)^2}{2c_1^k(\lambda_2+\mu_2)+c_2^k(\lambda_{11}^{(k)}+\lambda_{12}^{(k)})+2m^{(k)}};$$
$$\lambda_{44}^{*(k)}=c_1^k\lambda_{44}^{(k)}+c_2^k\mu_2-\frac{c_1^k c_2^k(\lambda_{44}^{(k)}-\mu_2)^2}{c_1^k\mu_2+c_2^k\lambda_{44}^{(k)}+s^{(k)}}; \tag{8}$$

де

$$2m^{(k)}=c_1^k(\lambda_{11}^{(k)}-\lambda_{12}^{(k)})+2c_2^k\mu_2;\quad 2n^{(k)}=c_1^k(\lambda_{11}^{(k)}+\lambda_{12}^{(k)})+2c_2^k(\lambda_2+\mu_2);\quad s^{(k)}=c_1^k\lambda_{44}^{(k)}+c_2^k\mu_2, \tag{9}$$

якщо жорсткість матриці більше жорсткості волокон, і

$$2m^{(k)}=\left(\frac{c_1^k}{\lambda_{11}^{(k)}-\lambda_{12}^{(k)}}+\frac{c_2^k}{2\mu_2}\right)^{-1};\quad 2n^{(k)}=\left(\frac{c_1^k}{\lambda_{11}^{(k)}+\lambda_{12}^{(k)}}+\frac{c_2^k}{2(\lambda_2+\mu_2)}\right)^{-1};\quad s^{(k)}=\left(\frac{c_1^k}{\lambda_{44}^{(k)}}+\frac{c_2^k}{\mu_2}\right)^{-1}, \tag{10}$$

якщо жорсткість волокон більше жорсткості матриці.

Якщо властивості волокон всіх напрямків однакові, то

$$\lambda_{ij}^{(k)}=\lambda_{ij}^1 \tag{11}$$

і вирази (8) – (10) від индексу k не залежать.

Ефективні коефіцієнти (8) – (10) є компонентами тензорів модулів пружності і термічних напружень в локальній системі координат $x_i^{(k)}$, де вісь $x_3^{(k)}$ паралельна волокнам k-го напрямку.

Перейдемо до загальної системи координат згідно перетворенню

$$x_i = \alpha_{ij}^{(k)} x_j^{(k)}; \;\; x_i^{(k)} = \alpha_{ji}^{k} x_j; \tag{12}$$

де

$$\alpha_{11}^{(k)} = \cos\theta_k \cos\varphi_k; \quad \alpha_{12}^{(k)} = -\sin\varphi_k; \quad \alpha_{13}^{(k)} = \sin\theta_k \cos\varphi_k;$$
$$\alpha_{21}^{(k)} = \cos\theta_k \sin\varphi_k; \quad \alpha_{22}^{k} = \cos\varphi_k; \quad \alpha_{23}^{k} = \sin\theta_k \sin\varphi_k;$$
$$\alpha_{31}^{(k)} = -\sin\theta_k; \quad \alpha_{32}^{(k)} = 0; \quad \alpha_{33}^{(k)} = \cos\theta_k. \tag{13}$$

Тоді тензори модулів пружності $\lambda_{ijmn}^{*(k)}$ в загальній системі координат виражаються через відповідні тензори $\lambda_{ijmn}^{*(k)\prime}$ в локальній системі координат співвідношеннями

$$\lambda_{ijmn}^{*(k)} = \alpha_{ip}^{(k)} \alpha_{jq}^{(k)} \alpha_{mr}^{(k)} \alpha_{ns}^{(k)} \lambda_{pqrs}^{*(k)\prime}. \tag{14}$$

Ефективні коефіцієнти всієї системи відповідно до схеми Фойхта визначаються формулами

$$\lambda_{ijmn}^{**(k)} = \frac{1}{c_1} \sum_{k=1}^{N} c_{1k} \lambda_{ijmn}^{*(k)}. \tag{15}$$

Підставляючи (15) в (14) і переходячи до матричних позначень, отримуємо

$$\begin{gathered}
\lambda_{ijmn}^{**} = \frac{1}{c_1} \sum_{k=1}^{N} c_{1k} \{ [\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)} \alpha_{m1}^{(k)} \alpha_{n1}^{(k)} + \alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)} \alpha_{m2}^{(k)} \alpha_{n2}^{(k)} + \\
+ \frac{1}{2} (\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)} + \alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)}) (\alpha_{m1}^{(k)} \alpha_{n2}^{(k)} + \alpha_{m2}^{(k)} \alpha_{n1}^{(k)})] \lambda_{11}^{*(k)} + \\
+ [\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)} \alpha_{m2}^{(k)} \alpha_{n2}^{(k)} + \alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)} \alpha_{m1}^{(k)} \alpha_{n1}^{(k)} - \\
- \frac{1}{2} (\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)} + \alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)}) (\alpha_{m1}^{(k)} \alpha_{n2}^{(k)} + \alpha_{m2}^{(k)} \alpha_{n1}^{(k)})] \lambda_{12}^{*(k)} + \\
+ \alpha_{i3}^{(k)} \alpha_{j3}^{(k)} \alpha_{m3}^{(k)} \alpha_{n3}^{(k)} \lambda_{33}^{*(k)} + [(\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)} + \alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)}) \alpha_{m3}^{(k)} \alpha_{n3}^{(k)} + \alpha_{i3}^{(k)} \alpha_{j3}^{(k)} (\alpha_{m1}^{(k)} \alpha_{n1}^{(k)} + \alpha_{m2}^{(k)} \alpha_{n2}^{(k)})] \lambda_{13}^{*(k)} + \\
+ [(\alpha_{i1}^{(k)} \alpha_{j3}^{(k)} + \alpha_{i3}^{(k)} \alpha_{j1}^{(k)}) (\alpha_{m1}^{(k)} \alpha_{n3}^{(k)} + \alpha_{m3}^{(k)} \alpha_{n1}^{(k)}) + (\alpha_{i2}^{(k)} \alpha_{j3}^{(k)} + \alpha_{i3}^{(k)} \alpha_{j2}^{(k)}) (\alpha_{m2}^{(k)} \alpha_{n3}^{(k)} + \alpha_{m3}^{(k)} \alpha_{n2}^{(k)})] \lambda_{44}^{*(k)} \}. \quad (16)
\end{gathered}$$

Формули (8) – (10), (16) визначають ефективні пружні властивості просторово армованого матеріалу через властивості волокон і матриці. Зауважимо, що в випадку фізичної нелінійності матриці, оскільки $\lambda_2(<\varepsilon_2>), \mu_2(<\varepsilon_2>)$, ці ефективні пружні коефіцієнти також є функціями середніх в ній деформацій $<\varepsilon_2>$.

Якщо властивості волокон і їх об'ємний вміст в кожному напрямку однакові, то

$$c_{1k} = \frac{c_1}{N}; \;\; \lambda_{ij}^{*(k)} = \lambda_{ij}^{*}, \tag{17}$$

що спрощує обчислення.

Визначення ефективних пружних властивостей волокнистих матеріалів просторового армування з розорієнтованими волокнами. В випадку, коли волокна розорієнтовані в просторі з функцією розподілу $f(\theta, \varphi)$, ефективні пружні коефіцієнти визначаються за формулами

$$\lambda_{ijmn}^{**}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} f(\theta,\varphi)\lambda_{pqrs}^{*}d\theta\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} f(\theta,\varphi)\alpha_{ip}^{(k)}\alpha_{jq}^{(k)}\alpha_{mr}^{(k)}\alpha_{ns}^{(k)}\lambda_{pqrs}^{*}{}'d\theta\,d\varphi; \quad (18)$$

Якщо волокна рівномірно розорієнтовані в просторі, то функція розподілу має вигляд

$$f(\theta,\varphi)=1. \quad (19)$$

Підставляючи (19) в (18) з урахуванням (16) отримуємо ізотропний матеріал, у якого залежності макронапружень від макродеформацій визначаються за формулами

$$<\sigma_{ij}>=\lambda^{**}<\varepsilon_{pp}>\delta_{ij}+2\mu^{**}<\varepsilon_{ij}>, \quad (20)$$

де ефективні коефіцієнти мають вигляд

$$\lambda^{**}=\frac{1}{45}[9(\lambda_{11}^{*}+\lambda_{12}^{*})-12(\lambda_{44}^{*}+\lambda_{66}^{*})+24\lambda_{13}^{*}+3\lambda_{33}^{*}];$$
$$\mu^{**}=\frac{1}{30}[(\lambda_{11}^{*}+\lambda_{12}^{*})+12(\lambda_{44}^{*}+\lambda_{66}^{*})-4\lambda_{13}^{*}+2\lambda_{33}^{*}]; \quad (21)$$

а $\lambda_{11}^{*},\lambda_{12}^{*},\lambda_{13}^{*},\lambda_{33}^{*},\lambda_{44}^{*},\lambda_{66}^{*}$ визначаються за формулами (8) – (11), (17).

Алгоритм для визначення ефективних деформативних властивостей та напружено-деформованого стану композиту. Ефективні деформативні коефіцієнти просторово-армованих волокнистих матеріалів з розорієнтованими волокнами і фізично нелінійною матрицею визначаються за формулами (8) – (11), (17), (21) і є функціями середніх в матриці деформацій $<\varepsilon_2>$.

Ефективні коефіцієнти будемо визначати ітераційним методом за наступним алгоритмом. Нульове наближення відповідає випадку фізично лінійної матриці. Тоді для нульового наближення

$$\lambda_{11}^{*[0]}+\lambda_{12}^{*[0]}=c_1(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2c_2[\lambda_2(0)+\mu_2(0)]-\frac{c_1c_1[\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1-2\lambda_2(0)-2\mu_2(0)]^2}{2c_1[\lambda_2(0)+\mu_2(0)]+c_2(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2m};$$
$$\lambda_{11}^{*[0]}-\lambda_{12}^{*[0]}=c_1(\lambda_{11}^1-\lambda_{12}^1)+2c_2\mu_2(0)-\frac{c_1c_2[\lambda_{11}^1-\lambda_{12}^1-2\mu_2(0)]^2}{2c_1\mu_2(0)+c_2(\lambda_{11}^1-\lambda_{12}^1)+\dfrac{2mn}{n+2m}};$$
$$\lambda_{13}^{*[0]}=c_1\lambda_{13}^1+c_2\lambda_2(0)-\frac{c_1c_1[\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1-2\lambda_2(0)-2\mu_2(0)][\lambda_{13}^1-\lambda_2(0)]}{2c_1[\lambda_2(0)+\mu_2(0)]+c_2(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2m};$$
$$\lambda_{33}^{*[0]}=c_1\lambda_{33}^1+c_2[\lambda_2(0)+2\mu_2(0)]-\frac{2c_1c_1[\lambda_{13}^1-\lambda_2(0)]^2}{2c_1[\lambda_2(0)+\mu_2(0)]+c_2(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2m};$$
$$\lambda_{44}^{*[0]}=c_1\lambda_{44}^1+c_2\mu_2(0)-\frac{c_1c_2[\lambda_{44}^1-\mu_2(0)]^2}{c_1^k\mu_2(0)+c_2\lambda_{44}^1+s}; \quad (22)$$

де

$$2m=c_1(\lambda_{11}^1-\lambda_{12}^1)+2c_2\mu_2(0);\; 2n=c_1(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2c_2[\lambda_2(0)+\mu_2(0)];\; s=c_1\lambda_{44}^1+c_2\mu_2(0), \quad (23)$$

якщо жорсткість матриці більше жорсткості волокон, і

$$2m=\left[\frac{c_1}{\lambda_{11}^1-\lambda_{12}^1}+\frac{c_2}{2\mu_2(0)}\right]^{-1};\ \ 2n=\left[\frac{c_1}{\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1}+\frac{c_2}{2(\lambda_2(0)+\mu_2(0))}\right]^{-1};\ s=\left[\frac{c_1}{\lambda_{44}^1}+\frac{c_2}{\mu_2(0)}\right]^{-1}, \tag{24}$$

якщо жорсткість волокон більше жорсткості матриці.

$$\lambda^{**[0]}=\frac{1}{45}[9(\lambda_{11}^{*[0]}+\lambda_{12}^{*[0]})-12(\lambda_{44}^{*[0]}+\lambda_{66}^{*[0]})+24\lambda_{13}^{*[0]}+3\lambda_{33}^{*[0]}];$$
$$\mu^{**[0]}=\frac{1}{30}[(\lambda_{11}^{*[0]}+\lambda_{12}^{*[0]})+12(\lambda_{44}^{*[0]}+\lambda_{66}^{*[0]})-4\lambda_{13}^{*[0]}+2\lambda_{33}^{*[0]}]; \tag{25}$$

$$<\varepsilon_{ij}^2>^{[0]}=\frac{2\mu^{**[0]}[\mu_2(0)-\bar{\mu}_1]\left(K^{**[0]}-\bar{K}_1\right)-3K^{**[0]}[K_2(0)-\bar{K}_1]\left(\mu^{**[0]}-\bar{\mu}_1\right)}{6c_2\mu^{**[0]}[\mu_2(0)-\bar{\mu}_1][K_2(0)-\bar{K}_1]}<\varepsilon_{rr}>\delta_{ij}+$$
$$+\frac{\mu^{**[0]}-\bar{\mu}_1}{c_k[\mu_2(0)-\bar{\mu}_1]}<\varepsilon_{ij}>, \tag{26}$$

де

$$K^{**[0]}=\frac{1}{9}[2(\lambda_{11}^{*[0]}+\lambda_{12}^{*[0]})+4\lambda_{13}^{*[0]}+\lambda_{33}^{*[0]}];\quad \bar{K}_1=\frac{1}{9}[2(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+4\lambda_{13}^1+\lambda_{33}^1];$$
$$\bar{\mu}_1=\frac{1}{30}[(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+12(\lambda_{44}^1+\lambda_{66}^1)-4\lambda_{13}^1+2\lambda_{33}^1]. \tag{27}$$

Для першого наближення отримаємо

$$\lambda_{11}^{*[1]}+\lambda_{12}^{*[1]}=c_1(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2c_2[\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[0]})+\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})]-$$
$$-\frac{c_1c_1[\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1-2\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[0]})-2\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})]^2}{2c_1[\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[0]})+\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})]+c_2(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2m};$$

$$\lambda_{11}^{*[1]}-\lambda_{12}^{*[1]}=c_1(\lambda_{11}^1-\lambda_{12}^1)+2c_2\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})-\frac{c_1c_2[\lambda_{11}^1-\lambda_{12}^1-2\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})]^2}{2c_1\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})+c_2(\lambda_{11}^1-\lambda_{12}^1)+\dfrac{2mn}{n+2m}};$$

$$\lambda_{13}^{*[1]}=c_1\lambda_{13}^1+c_2\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[0]})-\frac{c_1c_1[\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1-2\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[0]})-2\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})][\lambda_{13}^1-\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[0]})]}{2c_1[\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[0]})+\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})]+c_2(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2m};$$

$$\lambda_{33}^{*[1]}=c_1\lambda_{33}^1+c_2[\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[0]})+2\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})]-\frac{2c_1c_1[\lambda_{13}^1-\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[0]})]^2}{2c_1[\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[0]})+\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})]+c_2(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2m};$$

$$\lambda_{44}^{*[1]}=c_1\lambda_{44}^1+c_2\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})-\frac{c_1c_2[\lambda_{44}^1-\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})]^2}{c_1^k\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})+c_2\lambda_{44}^1+s}. \tag{28}$$

$$\lambda^{**[1]}=\frac{1}{45}[9(\lambda_{11}^{*[1]}+\lambda_{12}^{*[1]})-12(\lambda_{44}^{*[1]}+\lambda_{66}^{*[1]})+24\lambda_{13}^{*[1]}+3\lambda_{33}^{*[1]}];$$
$$\mu^{**[1]}=\frac{1}{30}[(\lambda_{11}^{*[1]}+\lambda_{12}^{*[1]})+12(\lambda_{44}^{*[1]}+\lambda_{66}^{*[1]})-4\lambda_{13}^{*[1]}+2\lambda_{33}^{*[1]}]; \tag{29}$$

$$<\varepsilon_{ij}^2>^{[1]}=\frac{2\mu^{**[1]}[\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})-\bar{\mu}_1](K^{**[1]}-\bar{K}_1)-3K^{**[1]}[K_2(<\varepsilon_2>^{[0]})-\bar{K}_1](\mu^{**[1]}-\bar{\mu}_1)}{6c_2\mu^{**[1]}[\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})-\bar{\mu}_1][K_2(<\varepsilon_2>^{[0]})-\bar{K}_1]}<\varepsilon_{rr}>\delta_{ij}+$$

$$+\frac{\mu^{**[1]}-\bar{\mu}_1}{c_k[\mu_2(<\varepsilon_2>^{[0]})-\bar{\mu}_1]}<\varepsilon_{ij}>, \tag{30}$$

де

$$K^{**[1]}=\frac{1}{9}[2(\lambda_{11}^{*[1]}+\lambda_{12}^{*[1]})+4\lambda_{13}^{*[1]}+\lambda_{33}^{*[1]}]. \tag{31}$$

І для n –го наближення

$$\lambda_{11}^{*[n]}+\lambda_{12}^{*[n]}=c_1(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2c_2[\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})+\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})]-$$
$$-\frac{c_1c_1[\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1-2\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})-2\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})]^2}{2c_1[\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})+\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})]+c_2(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2m};$$
$$\lambda_{11}^{*[n]}-\lambda_{12}^{*[n]}=c_1(\lambda_{11}^1-\lambda_{12}^1)+2c_2\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})-\frac{c_1c_2[\lambda_{11}^1-\lambda_{12}^1-2\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})]^2}{2c_1\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})+c_2(\lambda_{11}^1-\lambda_{12}^1)+\frac{2mn}{n+2m}};$$
$$\lambda_{13}^{*[n]}=c_1\lambda_{13}^1+c_2\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})-$$
$$-\frac{c_1c_1[\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1-2\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})-2\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})][\lambda_{13}^1-\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})]}{2c_1[\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})+\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})]+c_2(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2m};$$
$$\lambda_{33}^{*[n]}=c_1\lambda_{33}^1+c_2[\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})+2\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})]-$$
$$-\frac{2c_1c_1[\lambda_{13}^1-\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})]^2}{2c_1[\lambda_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})+\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})]+c_2(\lambda_{11}^1+\lambda_{12}^1)+2m};$$
$$\lambda_{44}^{*[n}=c_1\lambda_{44}^1+c_2\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})-\frac{c_1c_2[\lambda_{44}^1-\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})]^2}{c_1^k\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})+c_2\lambda_{44}^1+s}. \tag{32}$$

$$\lambda^{**[n]}=\frac{1}{45}[9(\lambda_{11}^{*[n]}+\lambda_{12}^{*[n]})-12(\lambda_{44}^{*[n]}+\lambda_{66}^{*[n]})+24\lambda_{13}^{*[n]}+3\lambda_{33}^{*[n]}];$$
$$\mu^{**[n]}=\frac{1}{30}[(\lambda_{11}^{*[n]}+\lambda_{12}^{*[n]})+12(\lambda_{44}^{*[n]}+\lambda_{66}^{*[n]})-4\lambda_{13}^{*[n]}+2\lambda_{33}^{*[n]}]; \tag{33}$$

$$<\varepsilon_{ij}^2>^{[n]}=\frac{2\mu^{**[n]}[\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})-\bar{\mu}_1](K^{**[n]}-\bar{K}_1)-3K^{**[n]}[K_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})-\bar{K}_1](\mu^{**[n]}-\bar{\mu}_1)}{6c_2\mu^{**[n]}[\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})-\bar{\mu}_1][K_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})-\bar{K}_1]}\times$$
$$\times<\varepsilon_{rr}>\delta_{ij}+\frac{\mu^{**[n]}-\bar{\mu}_1}{c_k[\mu_2(<\varepsilon_2>^{[n-1]})-\bar{\mu}_1]}<\varepsilon_{ij}>, \tag{34}$$

де

$$K^{**[n]}=\frac{1}{9}[2(\lambda_{11}^{*[n]}+\lambda_{12}^{*[n]})+4\lambda_{13}^{*[n]}+\lambda_{33}^{*[n]}]. \tag{35}$$

Запропонований метод дозволяє визначити ефективні коефіцієнти просторово-армованого волокнистого матеріалу з розорієнтованими волокнами та фізично нелінійною матрицею з будь-яким заданим ступенем точності.

Дослідження впливу нелінійності матриці на деформування композиту. Як конкретну задачу будемо досліджувати нелінійне деформування просторово-армованих волокнистих матеріалів з розорієнтованими волокнами і фізично нелінійною матрицею, в якого модуль об'ємного стиску матриці K_2 є сталим, а модуль зсуву μ_2 задається функцією

$$\mu_2(<\varepsilon_2>) = \begin{cases} \mu_{02}, & J_\varepsilon^2 < \dfrac{k_2}{2\mu_{02}}; \\ \mu_2' + \left(1 - \dfrac{\mu_2'}{\mu_{02}}\right)\dfrac{k_2}{2J_\varepsilon^2}, & J_\varepsilon^2 \geq \dfrac{k_2}{2\mu_{02}}, \end{cases} \tag{36}$$

де $\mu_{02},\ \mu_2',\ k_2 = \sigma_{02}\sqrt{2/3}$ – сталі матриці матеріалу, σ_{02} – межа її плинності, $J_\varepsilon^2 = (<\varepsilon_{pq}^2>'<\varepsilon_{pq}^2>')^{1/2},\ <\varepsilon_{pq}^2>'$ – девіатор середніх в матриці деформацій.

За допомогою комп'ютерного моделювання було проведено чисельне дослідження залежності деформування волокнистого композиту з рівномірно розорієнтованими волокнами від об'ємного вмісту компонентів. Як компоненти взяті відповідно високомодульні вуглецеві волокна з характеристиками [31]

$$E_1^1 = 8 \text{ ГПа};\quad E_3^1 = 226 \text{ ГПа};\quad \nu_{12}^1 = 0{,}3;\quad \nu_{13}^1 = 0{,}2;\quad G_{13}^1 = 60 \text{ ГПа}; \tag{37}$$

Об'ємним вмістом $c_1 = 0;\ 0,25;\ 0,5;\ 0,75;\ 1$ і епоксидна матриця з характеристиками [19, 31]

$$E_2 = 3 \text{ ГПа};\quad \nu_2 = 0{,}35;\quad E_2' = 0{,}02 \text{ ГПа};\quad \sigma_{02} = 0{,}12 \text{ ГПа}; \tag{38}$$

де $E_2,\ \nu_2$ – відповідно модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матриці; E_1^1 і $E_3^1,\ \nu_{12}^1$ і $\nu_{13}^1,\ G_{12}^1$ і G_{13}^1 – відповідно поперечний і поздовжній модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона і модулі зсуву волокон, які пов'язані з $\lambda_{11}^1,\ \lambda_{12}^1,\ \lambda_{13}^1,\ \lambda_{33}^1,\ \lambda_{44}^1$ формулами

$$\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 = E_1^1 E_3^1 \left[E_3^1 \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right) - 2E_1^1 (\nu_{13}^1)^2 \right]^{-1}; \quad \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 = G_{12}^1;$$

$$\lambda_{13}^1 = \nu_{13}^1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1); \quad \lambda_{33}^1 = (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1)\frac{E_3^1}{E_1^1}\left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1}\right); \quad \lambda_{44}^1 = G_{13}^1. \tag{39}$$

На основі отриманих залежностей було досліджено ефективні діаграми нелінійного деформування просторово-армованого волокнистого матеріалу з розорієнтованими волокнами та фізично нелінійною матрицею при різних об'ємних концентраціях волокон в випадку заданих макропараметрів.

$$<\varepsilon_{11}> \neq 0; \quad <\sigma_{22}> = <\sigma_{33}> = 0. \tag{40}$$

В цьому випадку згідно (20) макронапруження $<\sigma_{11}>$ в композиті пов'язані з макродеформацією $<\varepsilon_{11}>$ співвідношенням

$$<\sigma_{11}>=\frac{(3\lambda^{**}+2\mu^{**})\mu^{**}}{\lambda^{**}+\mu^{**}}<\varepsilon_{11}>. \tag{41}$$

На рис. 2 наведено графіки залежностей макронапруження $<\sigma_{11}>/\mu_2$ від макродеформації $<\varepsilon_{11}>$ для просторово-армованого волокнистого матеріалу з розорієнтованими волокнами та фізично нелінійною матрицею при різних об'ємних концентраціях волокон c_1. Як бачимо, фізична нелінійність матриці матеріалу істотно впливає на характер діаграм деформування для всіх значеннях об'ємного вмісту волокон $c_1 < 1$.

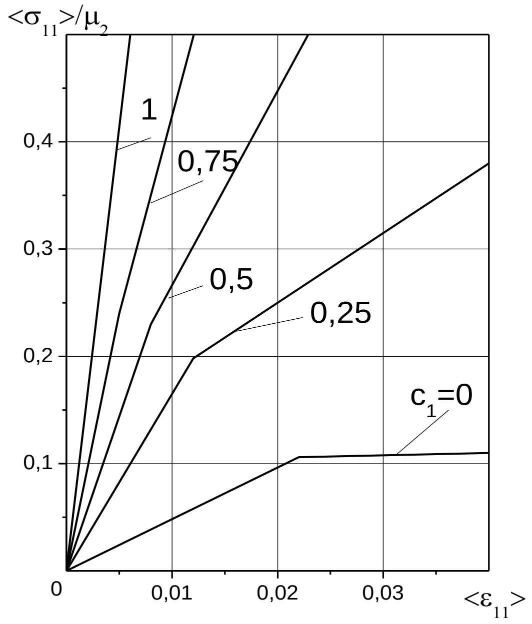

Рис. 2. **Залежності макронапруження $<\sigma_{11}>/\mu_2$ від макродеформації для $<\varepsilon_{11}>$ просторово-армованого волокнистого матеріалу з розорієнтованими волокнами при різних об'ємних концентраціях волокон c_1**

Висновки. В цій роботі проведено дослідження нелінійного деформування просторово-армованих волокнистих матеріалів з фізично нелінійною матрицею. Побудовано модель нелінійного деформування таких композитних матеріалів, розроблено алгоритм визначення напружено-деформованого стану та ефективних деформативних властивостей просторово-армованих волокнистих матеріалів з розорієнтованими волокнами та фізично нелінійною матрицею, а також досліджено залежність деформування матеріалу від об'ємного вмісту волокон. Встановлено, що фізична нелінійність матриці істотно впливає на характер діаграм деформування на всіх значеннях об'ємного вмісту волокон c_1<<1. На відміну від випадку лінійного деформування матриці, коли залежності макронапружень від макродеформацій є лінійними, матеріал за межею пружності деформується за параболічним законом при всіх об'ємних концентраціях волокон c_1<<1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каудерер Г. Нелинейная механика. URL: https://www.razym.org/naukaobraz/disciplini/fizika/277596-kauderer-g-nelineynaya-mehanika.html . (дата звернення 10.09.2021).
2. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. URL: https://www.nehudlit.ru › books › detail91160 . (дата звернення 21.02.2022).
3. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. URL: teoriyauprugosti1980.djvu . . URL: http://booksshare.net /index.php?id1=4&category=physics&author=lure-ai&book=1980&page=N (дата звернення 21.02.2022).
4. Митропольский Ю.А., Березовский А.А., Шхануков М.Х. Пространственно-временная локализация в задачах со сводными границами для нелинейного уравнения второго порядка // Укр.мат.журнал. 2006. Т. 58, № 2. С. 202–211.
5. Митропольский Ю.О., Березовский А.А. Задачі з вільними межами та нелокальні задачі для нелінійних параболічних рівнянь // Укр.мат.журн. 2007. Т. 59, № 1. С. 84–97.
6. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. . URL: https://www.twirpx.com/file/238530/ (дата звернення 21.02.2022).
7. Green A.E., Adkins I.E. Large classic deformations. Oxford: Clarendon Press, 2000. 325 p.
8. Hill R. Theory of mechanical properties of finite strengthened materials // J. Mech. Phys. Solids. 1995. V. 43, N 4. P. 189-198.
9. Hill R. On a class of constitutive relations for nonlinear infinitesimal elasticity // J. Mech. Phys. Solids. 2007. V. 55, N 5. P. 565-576.
10. Ogden R.W. On the overall moduli of nonlinear elastic composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 2004. V. 52, N 6. P. 265-282.
11. Ogden R.W. Extremum principes in nonlinear elastic composites materials // J. Mech. Phys. Solids. 2008. V. 56, N 4. P. 541-554.
12. Васильєв В.В., Солдатов С.А. Соотношения нелинейной механики композитных материалов // Механика композит. материалов. 2009, №3. С. 3-8.
13. Крегерс А.Ф., Мелбардіс Ю.Г. Расчет деформируемости пространственно-армируемого композита с упругопластической матрицей // Механика композитных материалов. 2002, № 4. С. 601-607.
14. Малмейстер А.К,. Янсон Ю.О. Прогнозирование деформативности физически нелинейных материалов при сложном напряженно состоянии // Механика композитных материалов. 2001, № 2. С. 314-318.
15. Хорошун Л.П., Маслов Б.П. Нелинейные свойства композитных материалов стохастической структуры. К.: Наук. думка, 2003. 132 с.
16. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // Прикладная механика. 1978. Т. 14, № 2. С. 3–17.
17. Хорошун Л.П. Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов // Прикладная механика. 1987. Т. 23, № 10. 100–108.
18. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикула Е.Н., Назаренко Л.В. Механика композитов: В 12-х т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т.3 Статистическая механика и эффективные свойства материалов. К.: Наук. думка, 1993. 390 с.
19. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Михайлова М.И., Бабич Д.В., Шикула Е.Н. Механика композитов: В 12 т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т. 12: Прикладные исследования. К: «А.С.К.», 2003. 398 с.
20. Хорошун Л.П., Шикула Е.Н., Деформирование физически нелинейных стохастических композитных материалов. Деформирование и кратковременная повреждаемость физически нелинейных стохастических композитных материалов / Успехи механики: В 6-ти томах / под редакцией А.Н.Гузя. / Том 6 (книга 2). К.: Литера ЛТД, 2011. 832 с. С. 161─191, 436-463.
21. Хорошун Л. П., Шикула Е.Н. Нелинейные деформативные свойства дисперсно-упрочненных материалов // Механика композитных материалов. 2002. Т. 38, № 4. С. 473-486
22. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation of physically nonlinear stochastic composites // International Applied Mechanics. 2008. V. 44. N 12. P. 1325-1351.
23. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and short-term damage of physically nonlinear stochastic composites // International Applied Mechanics. 2009. V. 45. N 6. P. 1204-1232.
24. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and damage of composite materials of stochastic structures: physically nonlinear problems // International Applied Mechanics. 2012. V. 48. N 4. P. 359-413.
25. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and long-term damage of physically nonlinear fibrous materials // International Applied Mechanics. 2014. Vol. 50, N 1. P. 58-67.
26. Хорошун Л. П., Шикула Е.Н. Ефективні деформівні властивості волокнистих композитних матеріалів при нелінійному деформуванні компонентів // Доповіді Національної академії наук України. 2016. № 6. С. 47 - 55.
27. Шикула Е.Н., Хорошун Л. П. Нелинейное деформирование волокнистых материалов // Водний транспорт. Збірник наукових праць Київської державної академії водного транспорту імені гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного. К.: КДАВТ, 2016. № 2 (25). С. 29 - 36.
28. Хорошун Л. П., Шикула Е.Н. Nonlinear deformation of laminated fiber-reinforced composites // International Applied Mechanics. 2005. Vol. 41. N 6. P.455–461
29. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Thermoelastic properties of spatially reinforced materials // International Applied Mechanics. 2011. Vol. 47, N 1. P. 13-20.

30. Шикула О.М. Модель деформування волокнистих матеріалів багатоспрямованого армування з розорієнтованими волокнами // Транспортні системи і технології. К.: ДУІТ. 2021. № 37. С. 119-129.
31. Крегерс А. Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. 2008. № 3. С. 433-441.

REFERENCES

1. Kauderer G. Nelinejnaya mekhanika. [Non-linear mechanics]. Retrieved from http://ssily.ru/admin/uploads /states/file/aktivnyie_filtryi_garmonik (rus). Pdf (Accessed 18 May 2014).
2. Blend D. Nelineynaya dinamicheskaya teoriya uprugosti. [Nonlinear dynamic theory of elasticity]. Retrieved from https://www.nehudlit.ru › books › detail91160 (rus). Pdf (Accessed 18 June 2008).
3. Lur'ye A.I. Nelineynaya teoriya uprugosti. [Nonlinear theory of elasticity]. Retrieved from teoriyauprugosti1980.djvu . Retrieved from http://booksshare.net/index.php?id1=4&category=physics&author=lure-ai&book=1980&page=N. (Accessed 6 June 2009).
4. Mitropol'skiy YU.A., Berezovskiy A.A., Shkhanukov M.KH. (2006) Prostranstvenno-vremennaya lokalizatsiya v zadachakh so svodnymi granitsami dlya nelineynogo uravneniya vtorogo poryadka. [Spatiotemporal localization in problems with summary boundaries for a second-order nonlinear equation]. Ukrainskiy Matematicheskiy Zhurnal - Ukrainian Mathematical Journal. Vol. 58, № 2. C. 202–211.
5. Mitropol'skiy YU.A., Berezovskiy A.A. (2007). Zadachi z vilʹnymy mezhamy ta nelokalʹni zadachi dlya neliniynykh parabolichnykh rivnyanʹ. [Free boundary value problems and nonlocal problems for nonlinear parabolic equations]. Ukrainskiy Matematicheskiy Zhurnal - Ukrainian Mathematical Journal. Vol. 59, № 1. C. 84–97.
6. Novozhilov V.V. Osnovy nelineynoy teorii uprugosti. [Fundamentals of the nonlinear theory of elasticity]. Retrieved from https://www.twirpx.com/file/238530/ (Accessed 28 July 2017).
7. Green A.E., Adkins I.E. (2000). Large classic deformations. Oxford: Clarendon Press. 325 p. (in English).
8. Hill R. (1995). Theory of mechanical properties of finite strengthened materials // J. Mech. Phys. Solids. Vol. 43, N 4. P. 189-198. (in English).
9. Hill R. (2007). On a class of constitutive relations for nonlinear infinitesimal elasticity // J. Mech. Phys. Solids. Vol. 55, N 5. P. 565-576. (in English).
10. Ogden R.W. (2004). On the overall moduli of nonlinear elastic composite materials // J. Mech. Phys. Solids. Vol. 52, N 6. P. 265-282. (in English).
11. Ogden R.W. (2008). Extremum principes in nonlinear elastic composites materials // J. Mech. Phys. Solids. Vol. 56, N 4. P. 541-554. (in English).
12. Vasil'êv V.V., Soldatov S.A. (2009). Sootnosheniya nelineynoy mekhaniki kompozitnykh materialov [Relationships of Nonlinear Mechanics of Composite Materials]. // Mehanika kompozitnyh materialov - Mechanics of composite materials. №3. C. 3-8.
13. Kregers A.F., Melbardís YU.G.(2002). Raschet deformiruyemosti prostranstvenno-armiruyemogo kompozita s uprugoplasticheskoy matritsey [Calculation of the Deformability of a Spatially Reinforced Composite with an Elastic-Plastic Matrix]. // Mehanika kompozitnyh materialov - Mechanics of composite materials.. № 4. C. 601-607.
14. Malmeyster A.K,. Yanson YU.O. (2001). Prognozirovaniye deformativnosti fizicheski nelineynykh materialov pri slozhnom napryazhenno sostoyanii [Predicting the Deformability of Physically Nonlinear Materials under a Complex Stress State]. // Mehanika kompozitnyh materialov - Mechanics of composite materials.. № 2. C. 314-318.
15. Khoroshun L.P., Maslov B.P. (2003). Nelineynyye svoystva kompozitnykh materialov stokhasticheskoy struktury. [Nonlinear Properties of Composite Materials with a Stochastic Structure]. K.: Nauk. Dumka.
16. Khoroshun L.P. (1978). Metodyi teorii sluchaynyih funktsiy v zadachah o makroskopicheskih svoystvah mikroneodnorodnyih sred [Methods of the theory of random functions in problems of macroscopic properties of microinhomogeneous media]. Prikladnaya mehanika - Applied Mechanics. Vol. 14, 2, 3–17.
17. Khoroshun L.P. (1987). Metod uslovnyih momentov v zadachah mehaniki kompozitnyih materialov [The method of conditional moments in the problems of mechanics of composite materials]. Prikladnaya mehanika - Applied Mechanics. Vol. 23, 10. 100–108.
18. Khoroshun L.P., Maslov B.P., Shikula E.N., & Nazarenko L.V. (1993) Mehanika kompozitov. (Vols. 1-12). Vol. 3. Statisticheskaya mehanika i effektivnyie svoystva materialov [Mechanics of composites. (Vols. 1-12). Vol. 3. Statistical mechanics and effective properties of materials]. K.: Nauk. Dumka.
19. Guz A.N., Khoroshun L.P., Mihaylova M.I., Babich D.V., Shikula E.N. (2003) Mehanika kompozitov. (Vols. 1-12). Vol. 12. Prikladnyie issledovaniya [Mechanics of composites. (Vols. 1-12). Vol. 12. Applied research]. K: «A.S.K.»
20. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2011) Deformirovanie fizicheski nelineynyih stohasticheskih kompozitnyih materialov. Deformirovanie i kratkovremennaya povrezhdaemost fizicheski nelineynyih stohasticheskih kompozitnyih materialov [The deformation of physically nonlinear stochastic composite materials. Deformation and short-term damage of physically nonlinear stochastic composite materials]. Uspehi mehaniki - (Vols. 1-6; Vol. 6.2). K.: Litera LTD.
21. Khoroshun L. P., Shikula E.N. (2002) Nelinejnye deformativnye svojstva dispersno-uprochnennyh materialov [Nonlinear deformation properties of dispersion-hardened materials] // Mehanika kompozitnyh materialov - Mechanics of composite materials. Vol. 38, 4, 473-486.

22. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2008). Deformation of physically nonlinear stochastic composites // International Applied Mechanics. 2008.V. 44. N 12. P. 1325-1351. (in English).
23. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2009). Deformation and short-term damage of physically nonlinear stochastic composites // International Applied Mechanics. V. 45. N 6. P. 1204-1232. (in English).
24. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2012). Deformation and damage of composite materials of stochastic structures: physically nonlinear problems // International Applied Mechanics. V. 48. N 4. P. 359-413. (in English).
25. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2014). Deformation and long-term damage of physically nonlinear fibrous materials // International Applied Mechanics. Vol. 50, N 1. P. 58-67. (in English).
26. Khoroshun L.P., Shikula O.M. (2016) Efektyvni deformivni vlastyvosti voloknystykh kompozytnykh materialiv pry neliniynomu deformuvanni komponentiv [Effective deformable properties of fibrous composite materials in nonlinear deformation of components] // Dopovidi Natsionalʹnoyi akademiyi nauk Ukrayiny - Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 6, 47-55.
27. Shikula E.N., Khoroshun L. P. (2016) Nelinejnoe deformirovanie voloknistyh materialov [Nonlinear deformation of fibrous materials] // Vodnij transport. Zbirnik naukovih prac' Kiïvs'koï derzhavnoï akademiï vodnogo transportu imeni get'mana Petra Konashevicha-Sagajdachnogo - Water transport. Collection of scientific works of the Kyiv State Academy of Water Transport named after Hetman Petro Konashevich-Sagaydachny. K.: KDAVT. Vol 25, 2, 29-36.
28. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2011) Thermoelastic properties of spatially reinforced materials // International Applied Mechanics. Vol. 47, 1, 13-20. (in English)
29. Khoroshun L.P., Shikula E.N. (2011) Thermoelastic properties of spatially reinforced materials // International Applied Mechanics. Vol. 47, 1, 13-20. (in English)
30. Shikula E.N. (2021) Modelʹ deformuvannya voloknystykh materialiv bahatospryamovanoho armuvannya z rozoriyentovanymy voloknamy [Model of deformation of fibrous materials of multidirectional reinforcement with disoriented fibers] // Transportni systemy i tekhnolohiyi - Transport systems and technologies. K.: DUIT, 37, 119-129.
31. Kregers A. F. (2008). Matematicheskoe modelirovanie termicheskogo rasshirenija prostranstvenno armiro-vannyh kompozitov [Mathematical modeling of thermal expansion of spatially reinforced composites] // Mehanika kompozitnyh materialov - Mechanics of composite materials. Vol. 24, 3, 433-441.

***Elena Shikula* [1]**

[1] Professor of the Department of Computer Science, State University of Telecommunications, Solomianska Street, 7, Kyiv, 03110

CONSTRUCTION OF A MODEL OF NONLINEAR DEFORMATION OF SPATIALLY-REINFORCED FIBER MATERIALS WITH DISORDERED FIBERS

A model of nonlinear deformation of fibrous materials of multidirectional reinforcement with misoriented fibers and a physically nonlinear matrix is proposed. A spatially reinforced fibrous material is regarded as a multicomponent material with a random arrangement of fibers. It is based on stochastic differential equations of the physically nonlinear theory of elasticity. The solution to the problem of the stress-strain state and the effective properties of the composite material is constructed by the method of conditional moments of L.P. Khoroshun. An algorithm for determining the effective deformative properties of a spatially reinforced material with a physically nonlinear matrix has been developed. The solution of nonlinear equations taking into account its physical nonlinearity is constructed by an iterative method. The law of connection between macrostresses and macrostrains in a spatially reinforced material and the dependence of average strains and stresses in its matrix on macrostrains have been established. Material deformation curves are plotted for various values of the fiber volumetric content. The dependence of the effective deformative properties of the spatially reinforced material on the volumetric content of fibers has been studied. The influence of the nonlinearity of the matrix on the deformation of a spatially reinforced composite material is investigated. It has been established that the nonlinearity of the matrix has a significant effect on the effective deformative properties and the stress-strain state of spatially reinforced materials.

***Keywords**: model of nonlinear deformation, fibrous material of multidirectional reinforcement, uniform misorientation of fibers, nonlinear deformation of the matrix, stress-strain state, effective deformation properties, influence of nonlinearity, computer implementation.*